1 Números racionales

INTRODUCCIÓN

Esta unidad desarrolla conceptos y técnicas ya conocidos de otros cursos. Sin embargo, es conveniente repasar las distintas interpretaciones que ofrecen las fracciones, las diferencias de interpretación de fracciones positivas y negativas, y la diferencia entre fracciones propias e impropias.

A lo largo de la unidad se resolverán operaciones tales como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y obtención del común denominador de varias fracciones, que pondrán de manifiesto su utilidad para resolver problemas de la vida diaria. Conviene hacer reflexionar a los alumnos sobre la presencia de las fracciones en distintos contextos.

Además, se trabajará la relación entre los números racionales y los números decimales, aprendiendo a pasar de unos a otros. Se practicará la lectura y escritura de números decimales exactos y su expresión en forma de fracciones decimales.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{d}{c}$ son *equivalentes* si se cumple que $a \cdot c = b \cdot d$.
- *Fracción irreducible* es aquella que no se puede simplificar.
- Para *comparar, sumar y/o restar fracciones,* estas deben tener igual denominador.
- El *producto de dos fracciones* es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y con denominador, el producto de los denominadores.
- Para *dividir fracciones* se realiza el producto cruzado de los términos de cada una de ellas.
- El conjunto de los *números racionales* lo forman los números enteros y los números fraccionarios.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer las formas de representación que tiene una fracción.	• Numerador y denominador. • Representación escrita, numérica, gráfica y en la recta.	• Utilización de dibujos y expresiones. • Identificación de una fracción. • Representación de una fracción.
2. Reconocer y obtener fracciones equivalentes a una dada.	• Obtención de fracciones equivalentes a una dada.	• Obtención de fracciones equivalentes. • Determinación de si dos fracciones son equivalentes.
3. Amplificar y simplificar fracciones.	• Amplificación de fracciones. • Simplificación de fracciones. • Fracción irreducible.	• Obtener fracciones equivalentes por amplificación y simplificación. • Reconocimiento de la fracción irreducible.
4. Reducir fracciones a común denominador.	• Obtención del común denominador de varias fracciones. • Comparación de fracciones.	• Búsqueda del denominador común de dos fracciones. • Ordenación de un conjunto de fracciones.
5. Sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones.	• Suma y resta de fracciones. • Multiplicación y división de fracciones.	• Operaciones con fracciones. • Operaciones combinadas.
6. Obtener la forma decimal de una fracción.	• Expresión de fracciones en forma decimal.	• Obtención de la expresión decimal de una fracción.
7. Reconocer los diferentes tipos de números decimales.	• Decimal exacto. • Decimal periódico puro. • Decimal periódico mixto.	• Distinción de los números decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.
8. Obtener fracciones a partir de números decimales.	• Expresión de números decimales como fracciones.	• Cálculo de la expresión fraccionaria de un número decimal exacto o periódico.

1 OBJETIVO 1
RECONOCER LAS FORMAS DE REPRESENTACIÓN QUE TIENE UNA FRACCIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

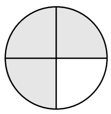
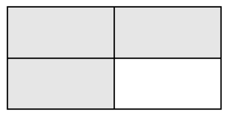
Una fracción está compuesta por un **numerador** y un **denominador**.
- **Denominador** → Partes en que se divide la unidad.
- **Numerador** ⟶ Partes que tomamos de la unidad.

EJEMPLO

Fracción: $\frac{3}{4}$ → NUMERADOR = 3; DENOMINADOR = 4

- **Denominador** → Dividimos la unidad en cuatro partes iguales.

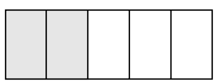
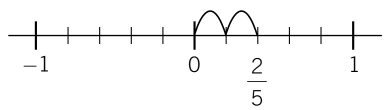
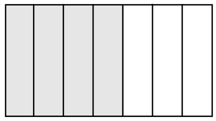
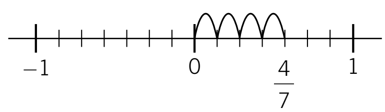
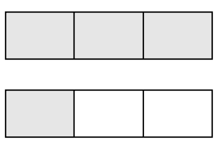
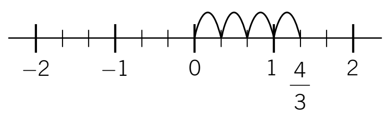
- **Numerador** → Tomamos tres partes del total.

 → $\frac{3}{4}$  → $\frac{3}{4}$

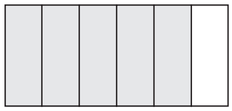
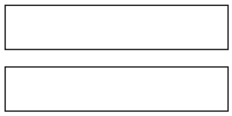
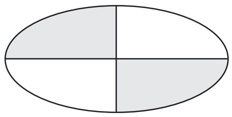
FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Una fracción se puede representar de distintas formas:
- Representación **escrita**.
- Representación **numérica**.
- Representación **gráfica**.
- Representación **en la recta numérica**.

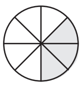
EJEMPLO

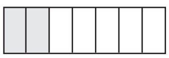
REPRESENTACIÓN ESCRITA	REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA
Dos quintos	$\frac{2}{5}$		
Cuatro séptimos	$\frac{4}{7}$		
Cuatro tercios	$\frac{4}{3}$		

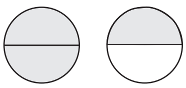
1 **Completa la siguiente tabla.**

REPRESENTACIÓN ESCRITA	REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA
Cuatro quintos	$\frac{4}{5}$		
			
Siete quintos	$\frac{7}{5}$		
			

2 **Partiendo del dibujo, halla la fracción que representa y escribe cómo se lee.**

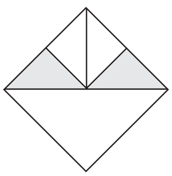
a)  → $\frac{}{8}$ → .... octavos

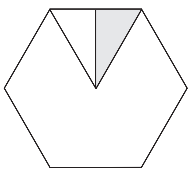
b)  → — → ....

c)  → $\frac{}{2}$ → .... medios

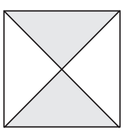
d)  → — → ....

3 **¿Cuál es la respuesta correcta? Rodéala.**

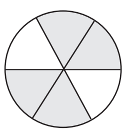
a) $\frac{2}{5}$  $\frac{2}{8}$

c) $\frac{1}{3}$  $\frac{1}{12}$

$\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{5}$  $\frac{1}{2}$

$\frac{2}{5}$

d) $\frac{4}{6}$  $\frac{1}{3}$

1

OBJETIVO 2

RECONOCER Y OBTENER FRACCIONES EQUIVALENTES A UNA DADA

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** cuando el producto cruzado de numeradores y denominadores es igual.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO

Las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes, ya que $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

1 **Dibuja las siguientes fracciones.**

a) $\frac{3}{6}$

c) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{4}{8}$

b) $\frac{4}{6}$

d) $\frac{5}{10}$

f) $\frac{1}{2}$

2 **Observando el ejercicio anterior vemos que algunas fracciones, a pesar de ser diferentes, nos dan el mismo resultado. Coloca en dos grupos estas fracciones.**

Grupo 1 { Fracciones que representan la mitad de la tarta.

Grupo 2 { Fracciones que representan dos tercios de la tarta.

3 **Calcula tres fracciones equivalentes.**

a) $\frac{9}{12} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

b) $\frac{16}{24} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

c) $\frac{2}{4} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

d) $\frac{6}{12} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

4 **Halla el número que falta para que las fracciones sean equivalentes.**

a) $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$

b) $\frac{4}{3} = \frac{8}{x}$

c) $\frac{x}{30} = \frac{2}{15}$

AMPLIFICAR Y SIMPLIFICAR FRACCIONES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

AMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

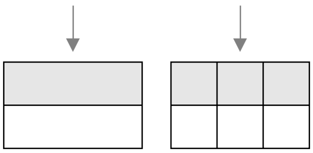
- Para obtener una fracción equivalente a otra fracción dada **multiplicamos** el numerador y el denominador de dicha fracción **por un número distinto de cero**. Este método se llama amplificación.
- Observa que podemos obtener tantas fracciones amplificadas como queramos.

EJEMPLO

Obtén una fracción equivalente y amplificada de $\frac{1}{2}$.

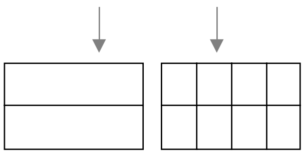
$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

Las fracciones son equivalentes, es decir, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ representan el mismo número.

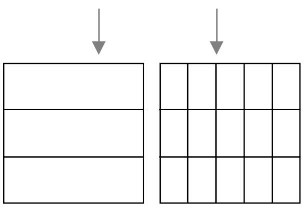


1 **Calcula fracciones equivalentes por amplificación.**

a) $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\ \cdot 4}{\ \cdot 4} = \frac{\ }{\ }$ $\frac{1}{2} = \frac{\ }{\ }$



b) $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{\ \cdot 5}{\ \cdot 5} = \frac{\ }{\ }$ $\frac{2}{3} = \frac{\ }{\ }$



2 **Halla dos fracciones equivalentes.**

a) $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{\ }{\ }$ $\frac{2}{3} = \frac{\ }{\ }$ $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{\ }{\ }$ $\frac{2}{3} = \frac{\ }{\ }$

b) $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{\ \cdot\ }{\ \cdot\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ \cdot\ }{\ \cdot\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

c) $\frac{4}{5} \rightarrow \frac{\ \cdot\ }{\ \cdot\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ \cdot\ }{\ \cdot\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

d) $\frac{9}{2} \rightarrow \frac{\ \cdot\ }{\ \cdot\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ \cdot\ }{\ \cdot\ } = \frac{\ }{\ }$ $\frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

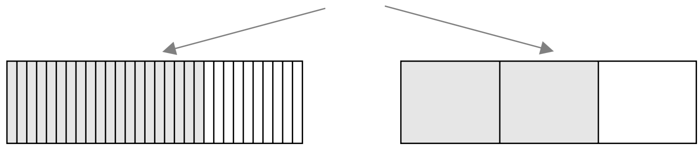
- **Simplificar** una fracción es encontrar otra fracción equivalente a ella dividiendo numerador y denominador por un factor común.
- Observa que el proceso, al contrario que en la amplificación, no se puede realizar indefinidamente. Se termina al encontrar una fracción que no se puede simplificar. Esta fracción se llama **fracción irreducible**.

EJEMPLO

Simplifica las siguientes fracciones.

$\mathbf{\frac{5}{10}} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$ $\frac{5}{10}$ y $\frac{1}{2}$ son equivalentes

$\mathbf{\frac{20}{30}} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3}$ $\frac{20}{30}$ y $\frac{2}{3}$ son equivalentes



3 **Amplifica y simplifica la siguiente fracción.**

$\mathbf{\frac{2}{4}}$

Amplificar: $\frac{2}{4} = \frac{2\cdot}{4\cdot} = \frac{}{}$

Simplificar: $\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{}{}$

$\frac{2}{4} = \frac{}{} = \frac{}{}$

4 **Haz lo mismo con estas fracciones.**

a) $\frac{6}{21}$

Amplificar: $\frac{6}{21} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{}$

Simplificar: $\frac{6}{21} = \frac{:}{:} = \frac{}{}$

$\frac{6}{21} = \frac{}{} = \frac{}{}$

b) $\frac{12}{20}$

Amplificar: $\frac{12}{20} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{}$

Simplificar: $\frac{12}{20} = \frac{:}{:} = \frac{}{}$

$\frac{12}{20} = \frac{}{} = \frac{}{}$

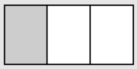
REDUCIR FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

COMPARAR FRACCIONES

- ¿Qué fracción es mayor, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$?

  Representamos las fracciones con un dibujo y lo vemos fácilmente:

  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{3}$ 

- El dibujo, sin embargo, no siempre es tan claro. Por tanto, vamos a aprender a hacerlo creando una fracción equivalente de cada fracción, con **común denominador**, es decir, tenemos que conseguir que el denominador de las dos fracciones sea el mismo.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

6 es el común denominador.

- Ahora, en lugar de comparar $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{3}$, comparamos $\frac{3}{6}$ con $\frac{2}{6}$.
- Como el denominador es común, comparamos los numeradores de $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$ para saber cuál de las fracciones es mayor:

$$\frac{3}{6} > \frac{2}{6}\text{; por tanto, } \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

- Recuerda que, dadas dos fracciones con igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.

1 **Ordena estas fracciones.**

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} = \frac{\quad \cdot 10}{\quad \cdot 10} = \frac{\quad}{30}$$

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} = \frac{\quad \cdot 15}{\quad \cdot 15} = \frac{\quad}{30}$$

$$\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{6}} = \frac{\quad \cdot \quad}{\quad \cdot \quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} = \frac{\quad \cdot \quad}{\quad \cdot \quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

COMÚN DENOMINADOR

$$\frac{\quad}{30} > \frac{\quad}{30} > \frac{\quad}{30} > \frac{\quad}{30}$$

$$\_\_\_ > \_\_\_ > \_\_\_ > \_\_\_$$

BUSCAR EL DENOMINADOR COMÚN

Queremos comparar las siguientes fracciones: $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$.

- ¿Cuáles son los denominadores? ...10..., ...3... y ...5...
- El **común denominador** será un número mayor que 10, 3 y 5, pero que tenga a 10, 3 y 5 como divisores, por ejemplo:

  a) El número 12 es mayor que 10, 3 y 5, pero ¿tiene a todos ellos como divisores?

  $$12 = 3 \cdot 4$$
  $$12 = 10 \cdot ?$$
  $$12 = 5 \cdot ?$$

  No tiene a 10 ni a 5 como divisores, solo a 3. Por tanto, 12 no sirve.

  b) El número 15 es también mayor que 10, 3 y 5. Pero veamos qué pasa cuando lo utilizamos:

  $$15 = 10 \cdot ?$$
  $$15 = 3 \cdot 5$$
  $$15 = 5 \cdot 3$$

  Tampoco sirve 15, ya que no tiene a 10 como divisor.

  c) Probamos con el número 30.

  $$30 = 10 \cdot 3$$
  $$30 = 5 \cdot 6$$
  $$30 = 3 \cdot 10$$

  El número 30 sirve como común denominador, aunque no es el único. Si continuásemos buscando encontraríamos más: 60, 90, …

- Vamos a hallar fracciones equivalentes a las dadas, con denominador común 30:

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{21}{30}$$

¿Qué número hay que multiplicar para que el denominador sea 30 si partimos de 10? $10 \cdot ? = 30$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$$

¿Qué número hay que multiplicar para que el denominador sea 30 si partimos de 3? $3 \cdot ? = 30$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30}$$

¿Qué número hay que multiplicar para que el denominador sea 30 si partimos 5? $5 \cdot ? = 30$

Por tanto: $\frac{7}{10}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5} \longrightarrow \frac{21}{30}, \frac{20}{30}, \frac{18}{30}$

Ahora ordenamos las fracciones de mayor a menor:

$$\frac{21}{30} > \frac{20}{30} > \frac{18}{30} \longrightarrow \frac{7}{10} > \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

2 **Ordena las siguientes fracciones: $\frac{7}{12}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ y $\frac{3}{4}$.**

- Nos fijamos en los denominadores: ...., ..., ..., ..., ...
- Queremos encontrar un número que contenga a todos los denominadores como divisores.

  El número más adecuado es 12.

$$\frac{7}{12} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{\cdot\, 2}{\cdot\, 2} = \frac{}{12}$$

¿Cómo se calcula este número? 12 : 6 = 2

$$\frac{2}{3} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{12}$$

¿Cómo se calcula este número? 12 : 3 =

$$\frac{5}{2} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{}$$

- Ahora ordenamos de mayor a menor:

REDUCIR FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Reduce a común denominador estas fracciones: $\frac{7}{15}$ y $\frac{8}{9}$.

Hallamos el m.c.m. de los denominadores.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 15 = 3 \cdot 5 \\ 9 = 3^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.m. } (15, 9) = 3^2 \cdot 5 = 45$$

El m.c.m. de los denominadores es el nuevo denominador de las fracciones.

$$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}} \quad 45 : 15 = 3 \;\rightarrow\; 7 \cdot 3 = 21 \;\rightarrow\; \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{45}} \qquad \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}} \quad 45 : 9 = 5 \;\rightarrow\; 8 \cdot 5 = 40 \;\rightarrow\; \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{45}}$$

3 **Completa la tabla.**

FRACCIONES	REDUCIDAS A COMÚN DENOMINADOR	ORDENADAS DE MENOR A MAYOR
$\frac{7}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$		
$\frac{47}{12}, \frac{23}{15}, \frac{7}{24}$		

SUMAR, RESTAR, MULTIPLICAR Y DIVIDIR FRACCIONES

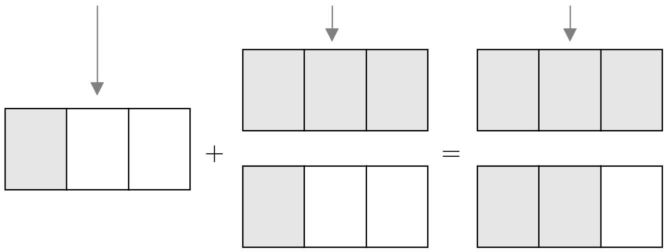
NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

SUMA (O RESTA) DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

La suma (o resta) de fracciones con igual denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (o resta) de los numeradores.

EJEMPLO

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$



Un tercio más cuatro tercios son cinco tercios.

SUMA (O RESTA) DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar (o restar) fracciones con distinto denominador, reducimos primero a denominador común y, después, sumamos (o restamos) sus numeradores.

EJEMPLO

Haz esta suma de fracciones: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$.

Para sumar las fracciones hay que obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador.

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15} \qquad\qquad \frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{18}{15}$$

Nos interesa obtener el mínimo común denominador de 3 y 5, en este caso 15.

Ahora sumamos las fracciones con igual denominador:

$$\frac{1}{3} + \frac{6}{5} = \frac{5}{15} + \frac{18}{15} = \frac{23}{15}$$

1 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{10}{7} - \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \qquad \frac{10}{7} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad} \qquad \frac{2}{3} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{12}{10}$$

2 **Realiza las multiplicaciones de fracciones.**

a) $\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4} =$

b) $\frac{10}{11} \cdot \frac{13}{9} =$

c) $\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{3} =$

d) $\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{20} =$

e) $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{15} =$

f) $\frac{7}{8} \cdot \frac{11}{9} =$

g) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} =$

h) $\frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3} =$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

La división de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda fracción, y cuyo denominador es el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

EJEMPLO

$$\frac{11}{2} : \frac{3}{5} = \frac{11 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{55}{6}$$

3 **Realiza las siguientes divisiones de fracciones.**

a) $\frac{8}{3} : \frac{4}{5} =$

b) $\frac{9}{5} : \frac{5}{7} =$

c) $\frac{4}{5} : \frac{1}{7} =$

d) $\frac{5}{2} : \frac{1}{10} =$

e) $\frac{8}{3} : \frac{16}{18} =$

f) $\frac{2}{7} : \frac{4}{3} =$

g) $\frac{6}{4} : \frac{3}{8} =$

h) $\frac{18}{5} : \frac{5}{2} =$

Recuerda que, cuando se realizan **operaciones combinadas**, es decir, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones a la vez:

- Se hacen primero las **operaciones de los paréntesis**.
- Luego se resuelven las **multiplicaciones y divisiones**, de izquierda a derecha.
- Por último, se operan las **sumas y restas**, en el mismo orden.

EJEMPLO

$$\mathbf{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{3}{4}:\frac{1}{5}-\frac{5}{4}}$$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\oplus\frac{3}{4}:\frac{1}{5}\ominus\frac{5}{4}$ En este caso, la operación queda divida en tres BLOQUES.

$\underset{A}{\boxed{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}}+\underset{B}{\boxed{\frac{3}{4}:\frac{1}{5}}}-\underset{C}{\boxed{\frac{5}{4}}}$ Realizamos las operaciones de cada bloque antes de sumar o restar:

A: Hacemos la multiplicación.
B: Hacemos la división.
C: No se puede operar.

$\boxed{\frac{15}{4}}+\boxed{\frac{15}{4}}-\boxed{\frac{5}{4}}$ Ahora realizamos las sumas y las restas: Solución $=\frac{25}{4}$

4 **Realiza estas operaciones:** $\mathbf{\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)}$.

- Tenemos dos bloques con los que debemos operar por separado:

$$\underset{A}{\boxed{\frac{7}{3}}}-\underset{B}{\boxed{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)}}\rightarrow\begin{cases}\text{A: } \frac{7}{3} & \text{No se puede operar.}\\ \text{B: } \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right) & \text{Tenemos que operar por partes, volviendo a dividir en bloques la operación.}\end{cases}$$

- Como no hay sumas o restas fuera de los paréntesis, tiene prioridad el producto:

$$\underset{\text{I}}{\boxed{\frac{5}{2}}}\cdot\underset{\text{II}}{\boxed{\left(\frac{2}{3}+1\right)}}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{I: No se puede operar.}\\ \text{II: Realizamos la suma: } \frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}+\frac{}{3}=\frac{}{3}\\ \qquad 1=\frac{\cdot 3}{\cdot 3}=\frac{}{3}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{5}{2}\cdot\frac{}{}=\frac{}{}$$

$$\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{7}{3}-\frac{}{}=\frac{}{}-\frac{}{}=\frac{}{}$$

Común denominador

OBTENER LA FORMA DECIMAL DE UNA FRACCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para **obtener la forma decimal** de una fracción o número racional se **divide el numerador entre el denominador**.

EJEMPLO

$\mathbf{\frac{3}{4}} \longrightarrow$

$$\begin{array}{l|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} \;\;20 & 0{,}75 \\ \;\;\;\;0 & \end{array}$$

FORMA FRACCIONARIA: $\mathbf{\frac{3}{4}} \longrightarrow$ FORMA DECIMAL: $0{,}75$

$\mathbf{\frac{14}{11}} \longrightarrow$

$$\begin{array}{l|l} 14 & 11 \\ \cline{2-2} \;\;30 & 1{,}2727\ldots \\ \;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;3 & \end{array}$$

FORMA FRACCIONARIA: $\mathbf{\frac{14}{11}} \longrightarrow$ FORMA DECIMAL: $1{,}2727\ldots = 1{,}\overset{\frown}{27}$

$\mathbf{\frac{13}{6}} \longrightarrow$

$$\begin{array}{l|l} 13 & 6 \\ \cline{2-2} \;\;10 & 2{,}166\ldots \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;4 & \end{array}$$

FORMA FRACCIONARIA: $\mathbf{\frac{13}{6}} \longrightarrow$ FORMA DECIMAL: $2{,}166\ldots = 2{,}1\overset{\frown}{6}$

1 **Expresa en forma decimal estas fracciones y ordénalas.**

a) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{9}{5}$

e) $\frac{37}{30}$

b) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{31}{25}$

f) $\frac{17}{6}$

...... < ...... < ...... < ...... < ...... < ...... $\rightarrow$ ...... < ...... < ...... < ...... < ...... < ......

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 7

RECONOCER LOS DIFERENTES TIPOS DE NÚMEROS DECIMALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción para obtener su expresión decimal pueden darse estos casos.

- **Si el resto es cero:**
  - Cuando el cociente no tiene parte decimal, tenemos un **número entero**.
  - Cuando el cociente tiene parte decimal, decimos que es un **decimal exacto**.
- **Si el resto no es cero:** las cifras del cociente se repiten, la expresión decimal tiene infinitas cifras. Se obtiene un **decimal periódico**.
  - Cuando la parte que se repite comienza desde la coma, se llama **decimal periódico puro**.
  - Cuando la parte que se repite no comienza desde la coma, se llama **decimal periódico mixto**.

EJEMPLO

$\frac{3}{4} = 0{,}75 \rightarrow$ Decimal exacto

$\frac{14}{11} = 1{,}\widehat{27} \rightarrow$ Decimal periódico puro

$\frac{13}{6} = 2{,}1\widehat{6} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

1 **Completa la tabla, clasificando la expresión decimal de las fracciones en exactas, periódicas puras o periódicas mixtas.**

FORMA FRACCIONARIA	FORMA DECIMAL	DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO PURO	DECIMAL PERIÓDICO MIXTO
$\frac{5}{3}$	$1{,}\widehat{6}$	No	Sí	No
$\frac{7}{6}$				
$\frac{9}{5}$				
$\frac{31}{25}$				
$\frac{37}{30}$				
$\frac{17}{6}$				

2 **Escribe en cada número las cifras necesarias para completar diez cifras decimales.**

a) 1,347347…

b) 2,7474…

c) 4,357357…

d) 0,1313…

e) 3,2666…

f) 0,25373737…

g) 1,222…

h) 43,5111…

OBTENER FRACCIONES A PARTIR DE NÚMEROS DECIMALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Todo número decimal exacto o periódico se puede expresar en forma de fracción.
Para ello hay que multiplicarlo por la potencia de 10 adecuada y realizar una serie de operaciones hasta obtener una fracción.

NÚMEROS DECIMALES EXACTOS

0,32

- Llamamos x a 0,32.
- Multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número.
- Simplificamos, si es posible.

$x = 0{,}32$

$100x = 100 \cdot 0{,}32$

$100x = 32$

$x = \dfrac{32}{100}$

$x = \dfrac{8}{25}$ → $0{,}32 = \dfrac{8}{25}$

1 **Completa la operación.**

0,14

$x = 0{,}14$

$100x = 100 \cdot 0{,}14$

$100x =$

$x = \dfrac{\quad}{100}$

$x = \text{——}$ → $0{,}14 = \text{——}$

2 **Halla la forma fraccionaria de este número decimal.**

0,3

¿Por qué hemos multiplicado por 10 y no por 100?

$x = 0{,}3$

$10x = 10 \cdot 0{,}3$

$x = \text{——}$ → $0{,}3 = \text{——}$

3 **Expresa estos números decimales como fracción.**

a) 0,101

¿Por qué valor multiplicamos?

$x = 0{,}101$

$x = \text{—}$ → $0{,}101 = \text{—}$

b) 0,24

$x = \text{—}$ → $0{,}24 = \text{—}$

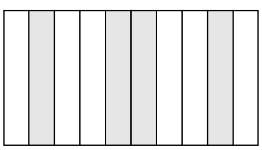
c) 0,7

$x = \text{—}$ → $0{,}7 = \text{—}$

d) 0,44

$x = \text{—}$ → $0{,}44 = \text{—}$

4 **Expresa mediante un número decimal la parte gris de la figura.**



Escribimos de forma fraccionaria la parte gris de la figura. → Pasamos a forma decimal.

NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS PUROS

Queremos obtener la forma fraccionaria del número decimal $2{,}333\ldots = 2{,}\widehat{3}$.

- Si $2{,}333\ldots$ no tuviera infinitas cifras decimales, podríamos obtener la forma fraccionaria como en el caso de los números decimales exactos.

- Por tanto, no podemos actuar de esta manera.

$2{,}333\ldots$

$x = 2{,}333\ldots$

$10x = 10 \cdot 2{,}333\ldots$

$10x = 23{,}333\ldots$

$x = \dfrac{23{,}333\ldots}{10} \longrightarrow \cancel{2{,}333\ldots = \dfrac{23{,}333\ldots}{10}}$

- Tenemos que eliminar las infinitas cifras decimales.

$2{,}333\ldots$

Multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período.

$x = 2{,}333\ldots$

$10x = 10 \cdot 2{,}333\ldots$

$10x = 23{,}333\ldots$

$$\boxed{\begin{array}{r} 10x = 23{,}\cancel{333}\ldots \\ -x = -2{,}\cancel{333}\ldots \\ \hline 9x = 21 \end{array}}$$

Realizando esta resta eliminamos la parte decimal.

Simplificamos.

$x = \dfrac{21}{9}$

$x = \dfrac{7}{3} \longrightarrow \boxed{2{,}\widehat{3} = \dfrac{7}{3}}$

- Siempre hay que simplificar, si se puede, la fracción resultante.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 **Completa las siguientes operaciones.**

a) $5{,}\overset{\frown}{7} = 5{,}777\ldots$

$x = 5{,}777\ldots$

$10x =$

$10x =$

$10x =$

$-x = -5{,}777\ldots$

$9x =$

$x = \dfrac{\quad}{\quad}$

$5{,}\overset{\frown}{7} = \dfrac{\quad}{\quad}$

b) $45{,}\overset{\frown}{8} = 45{,}888\ldots$

$x = 45{,}888\ldots$

$= 10 \cdot 45{,}888\ldots$

$= 458{,}888\ldots$

$= 458{,}\cancel{888}\ldots$

$-x = -45{,}\cancel{888}\ldots$

$=$

$x = \dfrac{\quad}{\quad}$

$45{,}\overset{\frown}{8} = \dfrac{\quad}{\quad}$

c) $7{,}\overset{\frown}{3}$

$x =$

$-x =$

$=$

$x = \dfrac{\quad}{\quad}$

$7{,}\overset{\frown}{3} = \dfrac{\quad}{\quad}$

6 **Calcula la forma fraccionaria de los números decimales.**

a) 15,474747…

Multiplicamos por 100.

$x = 15{,}474747\ldots$

$100x = 100 \cdot 15{,}474747\ldots$

$100x =$

$100x =$

$-x = -15{,}474747\ldots$

$99x =$

$x = \text{—}$

$15{,}\overset{\frown}{47} = \text{—}$

b) $24{,}\overset{\frown}{35}$

$x = 24{,}353535\ldots$

$x = \text{—}$

$24{,}\overset{\frown}{35} = \text{—}$

c) 103,251251…

$x = 103{,}251251\ldots$

$x = \text{—}$

$103{,}\overset{\frown}{251} = \text{—}$

NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS MIXTOS

Queremos obtener la forma fraccionaria del número decimal $2{,}1333\ldots = 2{,}1\widehat{3}$.

- Si actuamos como en el caso de los decimales puros, tenemos que:

$$x = 2{,}1333\ldots$$

$$10x = 10 \cdot 2{,}1333\ldots$$

$$10x = 21{,}333\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} 10x = & 21{,}\cancel{333}\ldots \\ -x = & -2{,}1\cancel{33}\ldots \\ \hline 9x = & 19{,}2 \end{array}}$$

$$x = \frac{19{,}2}{9}$$ No obtenemos una fracción.

- Hay que utilizar otro procedimiento.

$$2{,}1333\ldots$$

Multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene su parte periódica y no periódica.

$$x = 2{,}1333\ldots$$

$$100x = 100 \cdot 2{,}1333\ldots$$

$$100x = 213{,}333\ldots$$

Multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene su parte decimal no periódica.

$$10x = 21{,}333\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} 100x = & 213{,}\cancel{333}\ldots \\ -10x = & -21{,}\cancel{333}\ldots \\ \hline 90x = & 192 \end{array}}$$

Realizando esta resta eliminamos los decimales.

$$x = \frac{192}{90}$$

Simplificamos.

$$x = \frac{32}{15}$$

$$\boxed{2{,}1\widehat{3} = \frac{32}{15}}$$

7 **Expresa estos números decimales en forma de fracción.**

a) $5{,}3\overset{\frown}{7} = 5{,}3777\ldots$

$x = 5{,}3777\ldots$

$100x = 100 \cdot 5{,}3777\ldots$

$100x =$

$10x =$

$100x =$

$-10x = -53{,}777\ldots$

$90x =$

$x = \text{——}$

$5{,}3\overset{\frown}{7} = \text{—}$

b) $45{,}2\overset{\frown}{8} = 45{,}2888\ldots$

$x = 45{,}2888\ldots$

$x = \text{——}$

$45{,}2\overset{\frown}{8} = \text{—}$

c) $0{,}7\overset{\frown}{3}$

$x =$

$x = \text{——}$

$0{,}7\overset{\frown}{3} = \text{—}$

8 **Completa la siguiente operación.**

3,57474...

Multiplicamos por 1.000.

$x = 3{,}57474\ldots$

$1.000x = 1.000 \cdot 3{,}57474\ldots$

$1.000x = 3.574{,}7474\ldots$

$10x = 35{,}7474\ldots$

$$\begin{array}{rl} 1.000x = & 3.574{,}7474\ldots \\ -10x = & 35{,}7474\ldots \\ \hline 990x = & \end{array}$$

$x = \text{——}$

$3{,}5\overset{\frown}{74} = \text{—}$

9 **Expresa como una fracción.**

5,24545...

$x =$

$x = \text{——}$

$5{,}2\overset{\frown}{45} = \text{—}$

Hay números decimales que no se pueden expresar como una fracción.

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ $\pi = 3{,}1415\ldots$ $\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$

Estos números reciben el nombre de **números irracionales**.

10 **Clasifica los siguientes números.**

a) 0,14 b) 4,37777... c) $3,\overset{\frown}{4}$ d) 2,44 e) 43,2727... f) $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO PURO	DECIMAL PERIÓDICO MIXTO	IRRACIONAL

2 Números reales

INTRODUCCIÓN

Los alumnos han trabajado en cursos anteriores con las potencias, y conocen el significado de las potencias de exponente natural y de las partes que las componen.

Se empezará la unidad repasando las operaciones con potencias: multiplicación, división, potencia de una potencia y sus operaciones combinadas.

A continuación, se introducirá el caso de potencias de exponente negativo. Se señalará que estas potencias cumplen las mismas propiedades que las potencias con exponente natural, y por tanto, las reglas de las operaciones son las mismas.

La parte que puede presentar mayor dificultad a los alumnos es la notación científica de las potencias. Su utilidad radica en la posibilidad de expresar números muy grandes y muy pequeños mediante potencias de 10.

Es fundamental conseguir que los alumnos alcancen el mayor grado de comprensión posible a la hora de identificar y trabajar con los distintos tipos de números que aparecen en la unidad; por tanto, deben aprender a distinguir los diferentes números decimales: exacto, periódico puro, periódico mixto e irracional.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un número *a*, llamado *base*, elevado a un *exponente n* es: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot n$ veces $\cdot \ldots$
- *Producto de potencias de la misma base*: se escribe la base y se suman los exponentes.
- *División de potencias de la misma base*: se escribe la base y se restan los exponentes.
- *Potencia de una potencia*: se escribe la base y se multiplican los exponentes.
- Un *número a elevado a un exponente negativo* $-n$ es igual al inverso de la potencia de base *a* y exponente *n*: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Para *sumar o restar en notación científica* se reducen los números al orden de magnitud del mayor y se suman o restan las partes enteras o decimales.
- Para *multiplicar o dividir en notación científica* se multiplican o dividen los decimales entre sí y las potencias de 10, después se pone el resultado en notación científica.
- Los *números irracionales* son los números con infinitos decimales no periódicos.
- El conjunto de los *números reales* lo forman los números racionales y los irracionales.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Realizar operaciones con potencias.	• Potencias: base y exponente. • Multiplicación de potencias de la misma base. • División de potencias de la misma base. • Potencia de una potencia. • Potencias de exponente negativo.	• Expresión del producto de varios factores iguales como potencia. • Producto y división de potencias de la misma base. • Potencia de una potencia. • Utilización de las reglas de las operaciones combinadas con potencias. • Definición de potencia de exponente negativo.
2. Expresar números en notación científica.	• Notación científica de un número decimal. • Orden de magnitud.	• Paso de un número en notación decimal a científica, y viceversa. • Comparación de números escritos en notación científica.
3. Realizar sumas y restas en notación científica.	• Suma y resta de números en notación científica.	• Distinción del orden de magnitud de un número en notación científica. • Reducción a un mismo orden de magnitud para sumar y restar.
4. Realizar multiplicaciones y divisiones en notación científica.	• Multiplicación y división en notación científica.	• Multiplicación y división de números decimales y potencias de 10

REALIZAR OPERACIONES CON POTENCIAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

POTENCIA

- Un número *a*, llamado base, elevado a un exponente natural *n* es igual al resultado de multiplicar *a* por sí mismo *n* veces:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

a^n → ***n*: exponente** (indica cuántas veces se multiplica la base).
a^n → ***a*: base**

- Se lee: «*a* elevado a *n*».

EJEMPLO

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ → Se lee: «seis elevado a tres».

1 **Completa.**

a) $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = \boxed{}$ «.................................»

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \boxed{}$ «.................................»

c) $= 13^5$ «.................................»

d) $= \boxed{}$ «siete elevado a cuatro»

e) $= \boxed{}$ «nueve elevado a cinco»

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS

- Como las potencias son multiplicaciones, aplicando la definición de potencia tenemos que:

$$3^4 \cdot 3^3 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^7$$

$$5^2 \cdot 5^4 = \overbrace{5 \cdot 5} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^{\bigcirc} \leftarrow \textbf{exponente}$$

- Las potencias han de tener la **misma base** para poder sumar los exponentes.

$3^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ → No se puede poner con el mismo exponente.

- La fórmula general para **multiplicar potencias de la misma base** es:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $10^2 \cdot 10^5 =$

b) $7^4 \cdot 7^2 = 7^{\bigcirc}$

c) $11^3 \cdot 11^2 \cdot 11 =$

d) $3^2 \cdot 3^6 =$

e) $3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 =$

f) $\boxed{} \cdot 3^5 = 3^7$

g) $11^3 \cdot 11^3 =$

h) $19^5 \cdot 19^7 =$

i) $2^2 \cdot \boxed{} = 2^5$

DIVISIÓN DE POTENCIAS

- Para dividir potencias con igual base, se restan los exponentes: $a^n : a^m = a^{n-m}$.
- Ten en cuenta que la división entre potencias de distinta base no se puede realizar, y debe quedar indicada.

EJEMPLO

$$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$$

3 **Calcula estas operaciones.**

a) $5^6 : 5^4 = \dfrac{5^6}{5^4} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = 5 \cdot 5 = \boxed{}$

b) $3^7 : 3^4 = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$

c) $11^5 : 11^3 =$

d) $13^6 : 13^2 =$

e) $7^3 : 7^2 =$

4 **Realiza las divisiones.**

a) $3^5 : 3^4 = \boxed{}$

b) $\boxed{} : 7^2 = 7^5$

c) $4^6 : \boxed{} = 4^3$

d) $12^7 : 12^4 = \boxed{}$

e) $5^7 : \boxed{} = 5^2$

f) $6^2 : 6^5 = \boxed{}$

- Hay operaciones que combinan la multiplicación y la división. En estos casos, realizamos las operaciones, paso a paso.

$$\frac{3^2 \cdot 3^5 \cdot 3}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2$$

$$\frac{5^6 \cdot 5^3}{5^2 \cdot 5^3} = \frac{5^9}{5^5} = 5^4$$

- Recuerda que solo podemos operar con potencias de la misma base.

$$\frac{7^2 \cdot 7^3 \cdot 5^2}{7^2 \cdot 7} = \frac{7^5 \cdot 5^2}{7^3} = 7^2 \cdot 5^2$$

5 **Completa las siguientes operaciones.**

a) $(2^5 \cdot 2^4) : (2^3 \cdot 2^2) = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{2^{\bigcirc}}{2^{\bigcirc}} = \boxed{}$

b) $(11^5 \cdot 11^2 \cdot 11^3) : (11^4 \cdot 11) =$

c) $(10^5 : 10^2) \cdot 10^5 = \underline{\qquad} \cdot \boxed{} = \boxed{}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

POTENCIA DE UNA POTENCIA

- Si elevamos una potencia a otra potencia, el resultado es una potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes:

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

EJEMPLO

$(7^2)^3 = (7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

$(5^4)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

6 **Completa las siguientes operaciones.**

a) $(7^3)^4 = 7^{\bigcirc}$

b) $(3^3)^{\bigcirc} = 3^{15}$

c) $(6^2)^{\bigcirc} = 6^{12}$

d) $(9^3)^{\bigcirc} = 9^{15}$

e) $(4^2)^{\bigcirc} = 4^8$

f) $(2^5)^2 = 2^{\bigcirc}$

g) $(5^3)^4 = 5^{\bigcirc}$

h) $(10^2)^3 = 10^{\bigcirc}$

- Hay operaciones combinadas que presentan las tres operaciones estudiadas hasta el momento.
- Antes de comenzar su estudio veamos las reglas para operar:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
multiplicación	**división**	**potencia de una potencia**

EJEMPLO

$$(2^5 \cdot 2^4) : (2^2)^3 = \frac{2^5 \cdot 2^4}{(2^2)^3} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3$$

7 **Realiza las operaciones.**

a) $(3^5 : 3^2)^3 = \left(\frac{\quad}{\quad}\right)^3 = (\quad)^3 =$

b) $(5^7 : 5^3) \cdot (5^6 : 5^2) = \frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad}$

c) $(10^3)^4 : (10^2 \cdot 10^3) =$

d) $(4^2)^3 \cdot (4^5)^2 =$

e) $(6^5 : 6^2) \cdot (6^3)^4 =$

f) $(7^2 : 7) \cdot (7^3)^2 =$

POTENCIA DE UNA FRACCIÓN

Para elevar una fracción a una potencia se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

EJEMPLO

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

8 **Opera.**

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^7 =$

b) $\left(\frac{6}{10}\right)^3 =$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 =$

d) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 =$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 =$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 =$

9 **Completa el ejercicio y resuélvelo:** $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}$**.**

- Veamos el número de bloques en los que queda dividida la operación.

  En este caso tenemos dos bloques separados por el signo $-$.

$$\underbrace{\boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^2}}_{A} - \underbrace{\boxed{\frac{3}{4}}}_{B}$$

- Realizamos las operaciones de cada bloque:

  A: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{}{}$ B: $\frac{3}{4}$ En este bloque no podemos operar.

$$\frac{}{} - \frac{3}{4} = \frac{}{} - \frac{}{}$$

- Tenemos que resolver la resta, pero para ello necesitamos el denominador común.

  El denominador común es:

$$\frac{}{} = \frac{}{} \qquad \frac{}{} = \frac{}{}$$

- Ahora sí podemos restar: Solución $= \frac{}{}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

10 **Calcula, dando prioridad a las operaciones de los paréntesis.**

a) $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) =$

b) $\left(\frac{3}{5} - 1\right) : \frac{1}{2} =$

c) $\left(1 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{1}{3} + 2\right) =$

d) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) =$

POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

- Al efectuar una división de potencias, el resultado puede ser una potencia de exponente negativo:

$$7^3 : 7^5 = \frac{7^3}{7^5} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$$

- Es decir, un número entero elevado a una potencia negativa es una fracción.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

- En general, las potencias de exponente negativo se definen como: $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.
- Las potencias de exponente negativo cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente natural.

11 **Opera con exponentes negativos.**

a) $5^2 \cdot 3^{-2} = 5^2 \cdot \frac{1}{3^{\bigcirc}} = \frac{5^2}{3^{\bigcirc}} = \frac{25}{\square}$

b) $5^2 \cdot 5^{-7} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot \frac{1}{\square} \cdot 5^3 = \frac{5^2 \cdot 5^3}{\square} =$

c) $6^3 \cdot 2^{-4} = 6^3 \cdot \frac{1}{\square} = (2 \cdot 3)^3 \cdot \frac{1}{\square} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{\square} = \square$

$\boxed{6 = 2 \cdot 3}$

d) $7^3 \cdot 7^2 \cdot 7^{-4} = \square \cdot \square \cdot \frac{1}{\square} =$ ______________

e) $4^3 \cdot 2^{-3} \cdot 8 = 4^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 8 = (2 \cdot 2)^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 2^3 = \frac{}{} =$

$\boxed{4 = 2 \cdot 2}$

$\boxed{8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3}$

12 **Expresa en forma de potencia de la base indicada en cada caso.**

OPERACIÓN	BASE	RESULTADO
$9^{-7} \cdot 9^{11}$	3	
$4^6 : 8^{-3}$	2	
$(25^9)^{-3}$	5	
$(16^{-5} : 4^3)^{-2}$	2	
$(49^{-3})^4 : 7^{-6}$	7	

OBJETIVO 2

EXPRESAR NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- La expresión de un número en **notación científica** consiste en representarlo como un número entero o un número decimal, con una sola cifra entera, multiplicado por una potencia de 10 (positiva o negativa).

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0{,}001$$

- Llamamos **orden de magnitud** de un número expresado en notación científica al exponente de la potencia de 10.

EJEMPLO

Expresa en notación científica el número 3.220.000.

Desplazamos la coma seis lugares a la izquierda y multiplicamos por 10^6.

NOTACIÓN DECIMAL		NOTACIÓN CIENTÍFICA
3.220.000	$=$	$\boxed{3{,}22} \cdot 10^6$

PARTE DECIMAL POTENCIA DE 10

Determina el orden de magnitud del número anterior.

El orden de magnitud es 6, ya que el exponente de la potencia de 10 es 6.

1 **Realiza las operaciones.**

a) $10^3 = \qquad =$

b) $10^4 = \qquad =$

c) $10^5 = \qquad =$

d) $10^{-4} = \dfrac{1}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} = 0{,}0\ldots$

e) $10^{-6} = \qquad =$

f) $10^{-3} =$

2 **Escribe en forma decimal estos números expresados en notación científica.**

a) $3{,}2 \cdot 10^4 = 3{,}2 \cdot 10.000 =$

b) $3{,}2 \cdot 10^{-2} = 3{,}2 \cdot \dfrac{1}{\quad} =$

3 **Escribe, con todas sus cifras, estos números escritos en notación científica.**

a) $2{,}51 \cdot 10^6 =$

b) $9{,}32 \cdot 10^{-8} =$

c) $1{,}01 \cdot 10^{-3} =$

d) $1{,}15 \cdot 10^4 =$

e) $3{,}76 \cdot 10^{12} =$

4 **¿Cuál de estos números es mayor?**

$7{,}1 \cdot 10^{-3}$	$4{,}2 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$
↓	↓	↓
0,0071	0,	0,

El mayor número es:

5 **Los siguientes números no están correctamente escritos en notación científica. Escríbelos de la forma adecuada.**

NÚMERO	EXPRESIÓN CORRECTA
$12{,}3 \cdot 10^{15}$	
$0{,}6 \cdot 10^{-9}$	
$325 \cdot 10^{3}$	
$0{,}002 \cdot 10^{-2}$	
$6.012 \cdot 10^{4}$	
$1{,}3 \cdot 10^{3}$	

6 **Expresa en notación científica.**

a) Mil trescientos cuarenta billones.

b) Doscientas cincuenta milésimas.

c) Treinta y siete.

d) Cuarenta y tres billones.

e) Seiscientos ochenta mil.

f) Tres billonésimas.

7 **Indica el orden de magnitud de cada uno de estos números.**

a) $1{,}3 \cdot 10^{3}$

b) $6 \cdot 10^{-4}$

c) $3{,}2 \cdot 10^{7}$

d) $8 \cdot 10^{-5}$

e) $2{,}6 \cdot 10^{4}$

f) $1{,}9 \cdot 10^{2}$

OBJETIVO 3

REALIZAR SUMAS Y RESTAS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Realizar cálculos con números escritos en notación científica es muy fácil: basta con operar, por un lado, con los números que aparecen antes de la potencia de 10 y, por otro, con las potencias.

SUMAR Y RESTAR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para sumar (o restar) números en notación científica se reducen al orden de magnitud del mayor y, luego, se suman (o restan) los números decimales y se mantiene la misma potencia de 10.

EJEMPLO

Realiza las siguientes operaciones.

$\mathbf{3{,}5 \cdot 10^3 + 5{,}2 \cdot 10^3} = (3{,}5 + 5{,}2) \cdot 10^3 = 8{,}7 \cdot 10^3$

Si los exponentes de las potencias son iguales, se suman los números decimales y se deja la misma potencia de base 10.

$\mathbf{3{,}5 \cdot 10^4 + 5{,}2 \cdot 10^3} = 3{,}5 \cdot 10^4 + 0{,}52 \cdot 10^4 =$

Si los exponentes de las potencias son diferentes, se reduce al mayor.

$= (3{,}5 + 0{,}52) \cdot 10^4 = 4{,}02 \cdot 10^4$

Luego se suman los números decimales y se deja la potencia de base 10.

1 **Completa estas sumas y restas.**

a) $17.000 + 3{,}2 \cdot 10^3 - 232 \cdot 10^2 =$

$= 17 \cdot 10^3 + 3{,}2 \cdot 10^3 - \boxed{} \cdot 10^3 = (\boxed{} + \boxed{} - \boxed{}) \cdot 10^3 =$

b) $0{,}00035 + 5{,}7 \cdot 10^{-4} - 7{,}2 \cdot 10^{-3} =$

$= \boxed{} \cdot 10^{\bigcirc} + \boxed{} \cdot 10^{\bigcirc} - \boxed{} \cdot 10^{\bigcirc} = (\boxed{} + \boxed{} - \boxed{}) \cdot 10^{\bigcirc} =$

Han de tener el mismo exponente.

c) $1{,}9 \cdot 10^5 + 3{,}2 \cdot 10^7 =$

d) $6 \cdot 10^{-4} - 4{,}5 \cdot 10^{-2} =$

2 **Realiza las operaciones en notación científica.**

a) $37{,}3 \cdot 10^6 - \boxed{} = 8{,}4 \cdot 10^5$

b) $9{,}32 \cdot 10^{-3} + \boxed{} = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$

c) $1{,}15 \cdot 10^4 + \boxed{} = 3 \cdot 10^5$

d) $3{,}6 \cdot 10^{12} - \boxed{} = 2 \cdot 10^{12}$

REALIZAR MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MULTIPLICAR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para multiplicar números en notación científica se multiplican los números decimales y las potencias de 10. Es decir, se obtiene un número cuya parte decimal es igual al producto de los números decimales, y cuya potencia de 10 tiene un exponente que es igual a la suma de los exponentes de cada una de ellas.

EJEMPLO

$$3.457 \cdot (4{,}3 \cdot 10^4) \xrightarrow[\text{Pasamos a notación científica}]{} = (3{,}457 \cdot 10^3) \cdot (4{,}3 \cdot 10^4) =$$

$$\xrightarrow[\text{Multiplicamos los números y las potencias de 10}]{} = (3{,}457 \cdot 4{,}3) \cdot 10^3 \cdot 10^4 =$$

$$\xrightarrow[\text{Escribimos el resultado}]{} = 14{,}8651 \cdot 10^7 =$$

$$\xrightarrow[\text{Pasamos a notación científica}]{} = 1{,}48651 \cdot 10^8$$

1 **Completa siguiendo el modelo anterior.**

a) $13.500.000 \cdot (3{,}5 \cdot 10^5) \xrightarrow[\text{Pasamos a notación científica}]{} = (1{,}35 \cdot 10^{\bigcirc}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^5) =$

$\xrightarrow[\text{Operamos}]{} = (1{,}35 \cdot 3{,}5) \cdot 10^{\bigcirc} \cdot 10^5 =$

$\xrightarrow{} =$

b) $(4{,}5 \cdot 10^5) \cdot 0{,}032 \xrightarrow{} = (4{,}5 \cdot 10^5) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{\bigcirc}) =$

$\xrightarrow{} = \qquad\qquad =$

$\xrightarrow[\text{Pasamos a notación científica}]{} =$

c) $0{,}00013 \cdot 0{,}002 \xrightarrow{} = \qquad\qquad =$

$\xrightarrow{} = \qquad\qquad =$

$\xrightarrow[\text{Pasamos a notación científica}]{} =$

2 **Efectúa en notación científica.**

a) $(34 \cdot 10^3) \cdot (25{,}2 \cdot 10^{-2}) =$

b) $(8{,}06 \cdot 10^9) \cdot (0{,}65 \cdot 10^7) =$

c) $(37{,}3 \cdot 10^{-2}) \cdot (0{,}01 \cdot 10^2) =$

d) $(0{,}00000009) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-6}) =$

e) $(33{,}57) \cdot (4{,}3 \cdot 10^{-4}) =$

f) $(3 \cdot 10^5) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{11}) =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

DIVIDIR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para dividir números en notación científica se dividen los números decimales y las potencias de 10. Es decir, el número decimal es igual a la división de los números decimales y la potencia de 10 tiene un exponente que es igual a la resta de los exponentes de cada una de ellas.

EJEMPLO

14.000.000 : (3,2 · 10⁶)

$\xrightarrow{\text{Pasamos a notación científica}} = (1{,}4 \cdot 10^7) : (3{,}2 \cdot 10^6)$

$\xrightarrow{\text{Dividimos las partes enteras o decimales y las potencias de 10}} = \dfrac{(1{,}4 \cdot 10^7)}{(3{,}2 \cdot 10^6)} = \dfrac{1{,}4}{3{,}2} \cdot \dfrac{10^7}{10^6}$

$\xrightarrow{\text{Escribimos en notación científica}} = 0{,}4375 \cdot 10^1$

$\xrightarrow{\text{Pasamos a notación decimal}} = 4{,}375$

3 **Completa la siguiente operación.**

$13.500.000 : (4{,}3 \cdot 10^5) \xrightarrow{\text{Pasamos a notación científica}} = (1{,}35 \cdot \boxed{}) : (\qquad\qquad) =$

$\xrightarrow{\text{Pasamos a fracción}} = \dfrac{\boxed{} \cdot 10^{\bigcirc}}{\boxed{} \cdot 10^{\bigcirc}} =$

$\longrightarrow = \qquad \cdot 10^5 =$

$\xrightarrow{\text{Pasamos a notación científica}} =$

4 **Realiza las operaciones en notación científica.**

a) $(0{,}75 \cdot 10^7) : (0{,}3 \cdot 10^3) =$

b) $(13.650.000.000) : (6{,}5 \cdot 10^{15}) =$

c) $(14.310 \cdot 10^3) : (5{,}4 \cdot 10^5) =$

d) $(9 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^4) =$

e) $(20.100 \cdot 10^3) : (6{,}7 \cdot 10^5) =$

f) $(6 \cdot 10^4) : (3 \cdot 10^2) =$

g) $(15.320) : (20 \cdot 10^4) =$

h) $(6 \cdot 10^{-7}) : (1{,}2 \cdot 10^5) =$

3 Polinomios

INTRODUCCIÓN

Son múltiples los contextos en los que aparecen los polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas…, de ahí la importancia de comprender el concepto de polinomio y otros asociados a él, como son: grado del polinomio, término independiente, polinomio reducido, polinomio completo, polinomio opuesto y valor numérico de un polinomio.

Después de comprender y practicar cada uno de estos conceptos se estudiará cómo operar con polinomios: sumar, restar, multiplicar y dividir, aplicando el método más adecuado en cada caso. En las operaciones con polinomios, las mayores dificultades pueden surgir en la multiplicación (en la colocación correcta de los términos de cada grado) y en la división (en la determinación de cada término del cociente y en la resta de los productos obtenidos).

Es importante que los alumnos aprendan a deducir por sí mismos el desarrollo de las fórmulas de las igualdades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia y producto de una suma por una diferencia.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *polinomio* es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios, que son los *términos* del polinomio.
- El *grado* de un polinomio reducido es el del término de mayor grado.
- El *valor numérico de un polinomio*, para cierto valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo x por a y operando.
- La *suma de dos polinomios* se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La *resta de dos polinomios* se calcula sumando al primero el opuesto del segundo.
- El *producto de dos polinomios* se calcula multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro, y sumando después los polinomios obtenidos.
- *División de polinomios:* $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- Igualdades notables:
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el grado, el término y los coeficientes de un polinomio.	• Grado, término independiente y coeficientes de un polinomio. • Polinomio ordenado. • Polinomio reducido. • Polinomio completo.	• Identificación del grado, el término independiente y los coeficientes de un polinomio. • Redución de polinomios. • Ordenación de los términos de un polinomio. • Distinción de polinomios completos e incompletos.
2. Determinar el valor numérico de un polinomio.	• Valor numérico de un polinomio.	• Cálculo del valor numérico de un polinomio.
3. Realizar sumas y restas con polinomios.	• Suma y resta de polinomios.	• Suma y resta de polinomios.
4. Realizar multiplicaciones con polinomios.	• Multiplicación de polinomios.	• Multiplicación de polinomios: aplicar la propiedad distributiva.
5. Realizar divisiones con polinomios.	• División de polinomios: dividendo, divisor, cociente y resto.	• División de polinomios: divisiones enteras o exactas. • Comprobación de las divisiones.
6. Identificar y desarrollar igualdades notables.	• Cuadrado de una suma. • Cuadrado de una diferencia. • Producto de una suma por una diferencia.	• Identificación y desarrollo de igualdades notables.

RECONOCER EL GRADO, EL TÉRMINO Y LOS COEFICIENTES DE UN POLINOMIO

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido coincide con el grado de su término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio. En caso contrario, es **incompleto**.

EJEMPLO

Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:

a) Obtén el polinomio reducido.

b) Determina el grado del polinomio.

c) ¿Cuántos términos tiene el polinomio? ¿Cuál es su término independiente?

d) ¿Es un polinomio completo? Si el polinomio es incompleto, di qué término falta.

a) Para reducir un polinomio hay que resolver las operaciones que se puedan:

$$P(x) = 5x^2 - \underbrace{3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2 \longrightarrow \text{Polinomio reducido}$$

b) El grado del polinomio es 2: $P(x) = 5x^{2} - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y -2 es el término independiente.

$$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2} \longrightarrow -2 \text{ es el término independiente.}$$

$\longrightarrow$ Tiene tres términos.

d) $P(x) = \underset{2}{\underline{5x^2}} - \underset{1}{\underline{x}} - \underset{0}{\underline{2}}$ es un polinomio completo.
Grado

EJEMPLO

¿Es $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo o incompleto?

$Q(x) = \underset{3}{\underline{7x^3}} + \underset{2}{\underline{2x^2}} + \underset{0}{\underline{3}}$ Es un polinomio incompleto, pues no tiene término de grado 1.
Grado

1 **Calcula el polinomio reducido.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

2 **Calcula el polinomio reducido y ordena sus términos de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$$

$P(x) =$ $\boxed{}$

- Tiene .... términos.
- El término independiente es ....
- El grado del polinomio es ....
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ....

3 **Reduce el polinomio y ordena sus términos de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$P(x) =$ $\boxed{}$

- Tiene .... términos.
- El término independiente es ....
- El grado del polinomio es ....
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ....

4 **Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.**

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTA EL TÉRMINO
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

5 **Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica.**

a) Si es o no ordenado.
b) Si es o no reducido.
c) Si es o no completo.
d) Su grado.
e) Su término independiente.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 OBJETIVO 2
DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para cierto valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo, $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede dar cualquier valor a la x.

Para $x = 2 \longrightarrow P(2) = 2 \cdot (2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

El valor numérico del polinomio para $x = 2$ es 9.

Para $x = 10 \rightarrow P(10) = 2 \cdot (10)^2 + 1 = 2 \cdot 100 + 1 = 200 + 1 = 201$

El valor numérico del polinomio para $x = 10$ es 201.

1 **Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$

$x = 1 \rightarrow P(\ \ ) = (\ \ ) + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 **Calcula el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$.

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$.

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$.

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$.

REALIZAR SUMAS Y RESTAS CON POLINOMIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar los términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$.

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los elementos iguales.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 \boxed{-2x^2} \boxed{+5x} \boxed{-3} \boxed{+4x^2} \boxed{-3x} \boxed{+2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ +\ Q(x) = & \phantom{3x^3 -{}} 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$.

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5 - (5x^2 - 2x + 7) =$$

$$= 3x^3 \boxed{-5x^2} \boxed{+5} \boxed{-5x^2} + 2x \boxed{-7} = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 5x^2 + 5 \\ -\ Q(x) = & - (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

1 **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones en línea y en columna.**

2 **Calcula la suma y resta de cada par de polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $\qquad$ $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$

$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$

$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\qquad$ $Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$

$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$

$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$

$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$

$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $\qquad$ $Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$

$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$

$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $\qquad$ $Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$

$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$

$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

REALIZAR MULTIPLICACIONES CON POLINOMIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- El **producto** de dos polinomios se halla multiplicando cada uno de los monomios de un polinomio por los monomios del otro, y sumando, después, los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.

Vamos a resolverlo multiplicando en línea:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

Se multiplican todos los monomios de un polinomio por los monomios del otro polinomio.

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3}\ \boxed{+ 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3}\ \boxed{+ x \cdot x^2 + x \cdot 3}\ \boxed{- 7 \cdot x^2 - 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 =$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

Se suman los términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

1 **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

Multiplicamos los monomios.

$= \boxed{}\ \boxed{-}\ \boxed{+}$

$=$

Sumamos los términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.

Resolvemos el ejercicio multiplicando en columna:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 & \\
 \times & x^2 + 3 & \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 & \leftarrow \textit{Producto de 3 por } 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
 & 7x^5 + 2x^4 + x^3 - 7x^2 & \leftarrow \textit{Producto de } x^2 \textit{ por } 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21 & \leftarrow \textit{Suma de monomios semejantes}
\end{array}
$$

2 **Multiplica los polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$.**

$$
\begin{array}{rrl}
 & 5x^2 - 3x + 4 & \\
 \times & 3x + 2 & \\
\hline
 & & \leftarrow \textit{Producto de 2 por } 5x^2 - 3x + 4 \\
 & & \leftarrow \textit{Producto de } 3x \textit{ por } 5x^2 - 3x + 4 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & \boxed{} & \leftarrow \textit{Suma de monomios semejantes}
\end{array}
$$

3 **Calcula el producto del polinomio $R(x) = x^3 - 1$ y el monomio $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.**

4 **Halla el producto de los siguientes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

REALIZAR DIVISIONES CON POLINOMIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Lo primero que hay que tener en cuenta para dividir los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el del polinomio $Q(x)$.
- En estas condiciones, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen:

  $$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  ***P*(*x*)** es el polinomio **dividendo**.

  ***Q*(*x*)** es el polinomio **divisor**.

  ***C*(*x*)** es el polinomio **cociente**.

  ***R*(*x*)** es el polinomio **resto**.
- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:
  - La **división** es **exacta**.
  - El polinomio ***P*(*x*) es divisible por *Q*(*x*)**.
- En caso contrario, se dice que la división no es exacta.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$.

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline & \bigcirc \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. *En este caso,* $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} \qquad - 25x & 5x + 3 \\ \cline{1-1} \qquad 3x^2 - 20x - 7 & \end{array}$$

Multiplicamos $5x$ por cada uno de los términos del polinomio cociente ($x^2 + 5$), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} \qquad - 25x & 5x + 3 \\ \cline{1-1} \qquad \cancel{3x^2} - 20x - 7 & \\ \quad -\cancel{3x^2} \qquad - 15 & \\ \cline{1-1} \qquad - 20x - 22 & \end{array}$$

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3.

Multiplicamos 3 por $x^2 + 5$, cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $20x$, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo:	$P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$
Polinomio divisor:	$Q(x) = x^2 + 5$
Polinomio cociente:	$C(x) = 5x + 3$
Polinomio resto:	$R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división no es exacta, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

1 **Calcula las divisiones de polinomios y señala si son exactas o enteras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

2 **Haz las divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + \underbrace{a \cdot b + a \cdot b} + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(x + 3)^2} = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\mathbf{(4x + y)^2} = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

1 **Desarrolla estas igualdades.**

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

d) $(4a + b^2)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - \underbrace{a \cdot b - a \cdot b} + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(2y - 3)^2} = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\mathbf{(x^2 - 2)} = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(2x - 3y)^2 =$

d) $(4x^3 - a^2)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 \cdot (a - b) = a \cdot a - \cancel{a \cdot b} + \cancel{a \cdot b} + b \cdot b = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

3 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 **Desarrolla.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 **Desarrolla las igualdades.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

4 Ecuaciones de primer y segundo grado

INTRODUCCIÓN

La unidad comienza diferenciando entre ecuaciones e identidades, para pasar luego a la exposición de los conceptos asociados al de ecuación.

Para resolver ecuaciones de primer grado se aprenderá a transponer términos. Es importante que los alumnos comprendan que las reglas de la suma y el producto son transformaciones que permiten pasar de una ecuación inicial, compleja en su expresión, a otra más sencilla.

Los alumnos deben aprender a identificar una ecuación de segundo grado. Conviene mostrar la utilidad de la fórmula general para hallar las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado utilizando solo sus coeficientes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación* es una igualdad algebraica que solo es cierta para algunos valores.
- *Incógnita de una ecuación* es la letra de valor desconocido.
- *Grado de una ecuación* es el mayor exponente de la incógnita.
- *Solución o soluciones de una ecuación*: valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad.
- Para *resolver ecuaciones* se aplican las reglas de la suma y el producto.
- Ecuación de primer grado: $ax = b$.
- Ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$. a, b, c: números reales; $a \neq 0$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Identificar una ecuación, su grado y su solución.	• La ecuación como igualdad. • Elementos de una ecuación: incógnita, coeficiente, miembros, términos y grado.	• Identificación del grado de una ecuación. • Comprobación de si un número es solución de una ecuación.
2. Resolver ecuaciones.	• Transposición de términos. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de primer grado por transposición de términos.
3. Resolver ecuaciones con paréntesis y denominadores.	• Eliminación de paréntesis. • Eliminación de denominadores. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. • Aplicación correcta de la jerarquía de las operaciones. • Comprobación de la solución de una ecuación.
4. Resolver ecuaciones de segundo grado.	• Ecuación de segundo grado completa. • Solución general.	• Identificación de una ecuación de segundo grado. • Resolución de ecuaciones de segundo grado. • Aplicación correcta de la jerarquía de las operaciones. • Comprobación de la solución de una ecuación.
5. Resolver problemas mediante ecuaciones.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 1

IDENTIFICAR UNA ECUACIÓN, SU GRADO Y SU SOLUCIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Dado el polinomio $P(x) = 3x + 5$, ya sabemos cómo se calcula su valor numérico:

  $x = 3 \longrightarrow P(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$

  $x = -2 \longrightarrow P(-2) = 3 \cdot (-2) + 5 = -1$

  Si al polinomio le imponemos un valor como resultado, obtenemos una **ecuación**:

  $3x + 5 = 8$ Hay que saber para qué valor de x el polinomio vale 8.

- Podemos seguir el mismo razonamiento con la igualdad de dos polinomios:

  $P(x) = 3x^2 + 2x - 7$ $Q(x) = 2x + 8$

  Si imponemos la condición de igualdad entre los dos polinomios, también se obtiene una ecuación:

  $3x^2 + 2x - 7 = 2x + 8$ Hay que saber para qué valor de x se cumple esta igualdad.

  Por tanto, el concepto de ecuación aparece cuando se impone una igualdad algebraica.

En una ecuación con una sola incógnita:

- La **incógnita** es la letra con valor desconocido.
- El **grado** es el mayor exponente con que figura la incógnita en la ecuación, una vez realizadas todas las operaciones.
- La parte izquierda de la igualdad se llama **primer miembro**, y la parte derecha, **segundo miembro**.
- Cada miembro está formado por uno o más sumandos que se denominan **términos**.
- En los términos con incógnita, el número se llama **coeficiente**. Los términos sin incógnita se denominan **términos independientes**.
- La **solución** o soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que la igualdad sea cierta.

EJEMPLO

Elementos de una ecuación:

$$\underbrace{\underbrace{3x}_{\text{término}} + \underbrace{7(x-1)}_{\text{término}}}_{\text{1.}^{\text{er}}\text{ miembro}} = \underbrace{\underbrace{2x}_{\text{término}} + \underbrace{5}_{\text{término}}}_{\text{2.}^{\text{o}}\text{ miembro}}$$

x: incógnita

coeficientes: 3, 7, 2

EJEMPLO

Grado de una ecuación:

$2x - 8 = 7 \rightarrow$ Primer grado

$(x - 5) \cdot (x - 2) = 1 \xrightarrow[\text{Operando}]{} x^2 - 7x + 10 = 1 \rightarrow$ Segundo grado

1 **Señala el grado de las siguientes ecuaciones.**

a) $5x + 6 = x^2 + 4$ b) $x^2 + x - 1 = x^2 - 2x$ c) $7(x - 1) = 4(x - 2) - 3(-x - 5)$

2 **¿Cuál de los números es solución de la ecuación $5x - 9 = 4(x - 5)$?**

a) 4 b) -3 c) 14 d) -11

RESOLVER ECUACIONES. TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- **Resolver una ecuación** es obtener el valor de la incógnita que cumple la ecuación.
- Para ello se emplea la **transposición de términos**, pasando todos los términos con x a un miembro y todos los números al otro. Se deben tener en cuenta las siguientes reglas.
  - **Regla de la suma:** un término que está sumando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro restando, y si está restando, pasará sumando.
  - **Regla del producto:** un término que está multiplicando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro dividiendo, y si está dividiendo, pasará multiplicando.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación por transposición: $6x + 8 = 3x - 4$.

- Si restamos -8 en los dos miembros, eliminamos el término $+8$ del primer miembro. Esto equivale a pasar directamente el término -8 al segundo miembro como $+8$.
- Igualmente, para eliminar $3x$ del segundo miembro lo pasamos al primero como $-3x$.
- Operamos y, en la ecuación obtenida, $3x = -12$, pasamos el 3, que está multiplicando en el primer miembro, dividiendo al segundo miembro.

$$\boxed{6x + 8 = 3x - 4}$$

$$6x + 8 = 3x - 4$$

$$6x - 3x = -4 - 8$$

$$3x = -12$$

$$x = \frac{-12}{3} = -4$$

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $3x + 8 = 5x + 2$

d) $4x - 5 = 3x - x + x - 5$

b) $3x - 5 = 2x + 4 + x - 9$

e) $2x + 5 = 2 + 4x + 3$

c) $9x - 11 = 4x + 6 + 5x + 5$

f) $6x + 2x + 4 = 3x + 3 - 5x - 9$

OBJETIVO 3

RESOLVER ECUACIONES CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ECUACIONES CON PARÉNTESIS

Para eliminar los paréntesis de una ecuación:

- Si el paréntesis va precedido del signo $+$, se dejan los términos de su interior tal y como aparecen.

$$x + (2x - 3 + x^2) = x + 2x - 3 + x^2$$

- Si el paréntesis va precedido del signo $-$, se cambia el signo de todos los términos de su interior.

$$x - (2x - 3 + x^2) = x - 2x + 3 - x^2$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación. $\mathbf{3(x + 5) - 7x + 1 = 2x - 2}$

a) Quitamos paréntesis: $3x + 15 - 7x + 1 = 2x - 2$

b) Reducimos términos semejantes: $-4x + 16 = 2x - 2$

c) Transponemos términos: $16 + 2 = 2x + 4x \rightarrow 18 = 6x$

d) Despejamos la x: $\dfrac{18}{6} = x \rightarrow 3 = x$

e) Comprobamos la solución: $3(x + 5) - 7x + 1 = 2x - 2$

$$\text{Si } x = z \rightarrow 3(3 + 5) - 7 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot 3 - 2$$

$$3 \cdot 8 - 21 + 1 = 6 - 2$$

$$24 - 21 + 1 = 4$$

$$4 = 4$$

La solución es correcta, porque el resultado es el mismo número en ambos miembros.

1 **Resuelve la ecuación: $\mathbf{4[(x + 2) \cdot 4 - 7] = 10x - 8}$.**

a) Quitamos paréntesis.

b) Reducimos términos semejantes.

c) Transponemos términos.

d) Despejamos la x.

e) Comprobamos la solución.

La solución es correcta si el resultado final es el mismo número en ambos miembros.

ECUACIONES CON DENOMINADORES

Para **eliminar los denominadores** de una ecuación hay que calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores y multiplicar los dos miembros de la ecuación por ese número.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación. $\dfrac{7x-3}{2}-7=\dfrac{x+7}{5}$

a) Calculamos el m.c.m.: m.c.m. $(2, 5) = 10$

b) Multiplicamos la ecuación por 10: $\dfrac{10}{2}(7x-3)-10\cdot 7=\dfrac{10}{5}(x+7)$

$$5(7x-3)-10\cdot 7=2(x+7)$$

c) Quitamos paréntesis: $35x-15-70=2x+14$

d) Reducimos términos semejantes: $35x-85=2x+14$

e) Transponemos términos: $35x-2x=14+85 \rightarrow 33x=99$

f) Despejamos la x: $x=\dfrac{99}{33}=3$

g) Comprobamos la solución: $\dfrac{7x-3}{3}-7=\dfrac{x+7}{5}$

$$\text{Si } x=3 \rightarrow \frac{7\cdot 3-3}{2}-7=\frac{3+7}{5}$$

$$\frac{18}{2}-7=\frac{10}{5}$$

$$9-7=2 \rightarrow 2=2$$

2 **Resuelve la siguiente ecuación:** $\dfrac{3x+1}{2}-3=\dfrac{2(x+1)}{3}$**.**

a) Calculamos el m.c.m.

b) Multiplicamos la ecuación por el m.c.m.

c) Quitamos paréntesis.

d) Reducimos términos semejantes.

e) Transponemos términos.

f) Despejamos la x.

g) Comprobamos la solución.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve las ecuaciones y comprueba la solución.**

a) $3(x-2)-(2x-1)=0$

b) $4(x-3)-5(x+8)=6(x+3)-2$

c) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{x}{2}$

d) $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+4(2x-1)=\dfrac{x+4}{7}+2(x+4)$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c: \text{ números reales; } a \neq 0$$

- La **fórmula general** para resolver una ecuación de segundo grado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación. $\boldsymbol{x(x + 3) - 2(x + 1) = 4}$

a) Quitamos paréntesis: $x^2 + 3x - 2x - 2 = 4$

b) Reducimos términos semejantes: $x^2 + x - 2 = 4$

c) Como es una ecuación de 2.º grado, pasamos todos los términos a un miembro: $x^2 + x - 6 = 0$

d) Aplicamos la fórmula general. Para ello identificamos los términos:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 1 \text{ y } c = -6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \longrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \longrightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \longrightarrow x_2 = -3$$

e) Comprobamos las soluciones:

$$x(x + 3) - 2(x + 1) = 4$$

$$\text{Si } x_1 = 2 \longrightarrow 2(2 + 3) - 2(2 + 1) = 4$$

$$2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4$$

$$10 - 6 = 4$$

$$4 = 4$$

$$x(x + 3) - 2(x + 1) = 4$$

$$\text{Si } x_2 = -3 \longrightarrow -3(-3 + 3) - 2(-3 + 1) = 4$$

$$-3 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) = 4$$

$$0 + 4 = 4$$

$$4 = 4$$

1 **Resuelve la siguiente ecuación: $(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$.**

$(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$

Quitamos los paréntesis: $\square+\square-\square-\square=\square-\square-3x$

Como es una ecuación de 2.º grado, pasamos todo a un miembro: $=0$

Operamos: $\boxed{2x^2+x-2=0} \rightarrow a=2,\ b=1$ y $c=-2$

Utilizamos la fórmula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(\quad)+(\quad)}}{4}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(\quad)}}{4}$$

$$x=\frac{-1\pm(\quad)}{4}$$

$x_1=$

$x_2=$

Comprobamos si las soluciones son correctas:

$(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$

Si $x_1=\square \rightarrow (\square+1)\square-2(\square+1)=\square(1-\square)-3\square$

$=$

$=$

$\boxed{\quad=\quad}$ Por tanto, $x_1=\square$ es solución.

Si $x_2=\square \rightarrow (\square+1)\square-2(\square+1)=\square(1-\square)-3\square$

$=$

$=$

$\boxed{\quad=\quad}$ Por tanto, $x_2=\square$ también es solución.

2 **Resuelve la ecuación: $x(x-2)+2x=4$.**

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2-4x+3=0$

$\boxed{x_1 =\quad}$ $\boxed{x_2 =\quad}$

Comprobamos el resultado:

b) $2x^2-20x+50=0$

$\boxed{x_1 =\quad}$ $\boxed{x_2 =\quad}$

Comprobamos el resultado:

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema.
c) **Resolver** el problema.
d) **Comprobar** el resultado.

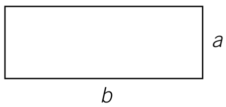
EJEMPLO

El perímetro de una parcela rectangular es de 90 metros y mide 5 metros más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Recordamos antes de empezar dos fórmulas básicas:

Área del rectángulo $= b \cdot a$

Perímetro del rectángulo $= 2a + 2b$



a) Leer detenidamente el enunciado (puede ser útil realizar un dibujo básico o esquema).

b) Plantear el problema: Si el lado menor es x, ¿cuál será el lado mayor si es 5 metros más largo que el menor?

El lado mayor será $x + 5$.

Por tanto: $x \longrightarrow$ lado menor de la parcela
$x + 5 \rightarrow$ lado mayor de la parcela

Como el perímetro de la parcela mide 90 metros $\rightarrow 2x + 2(x + 5) = 90$

c) Resolver la ecuación: $2x + 2x + 10 = 90 \rightarrow 4x = 80 \rightarrow x = 20$

Lado menor: 20 metros Lado mayor: $20 + 5 = 25$ metros

d) Comprobar la solución:

$$2x + 2(x + 5) = 90 \xrightarrow{x = 20} 2 \cdot 20 + 2 \cdot (20 + 5) = 90 \rightarrow 40 + 2 \cdot 25 = 90 \rightarrow 90 = 90$$

1 **Miguel tiene ahora cuatro años más que su primo Ignacio y, dentro de tres años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

a) Lee despacio el enunciado.

b) Plantea el problema, organizando la información.

	HOY		**DENTRO DE 3 AÑOS**
Miguel tiene	$x + 4$ años	$+ 3$ años $\longrightarrow$	$x + 4 + 3$
Ignacio tiene	x años	$+ 3$ años $\longrightarrow$	

La suma de ambos números es 20 $\longrightarrow$ $\boxed{}$

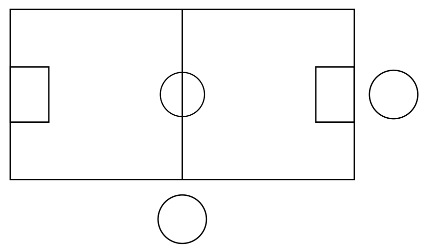
c) Resuelve el problema.

d) Comprueba el resultado.

2 **Un campo de fútbol mide 30 metros más de largo que de ancho y su área es 7.000 m^2. Calcula sus dimensiones.**

a) Lee detenidamente el problema.

b) Plantea la ecuación.



Su área es 7.000 m^2 ⟶ $\boxed{\quad\quad\quad\quad = 7.000}$

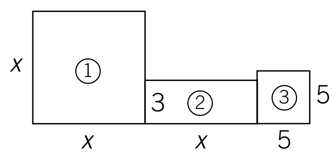
c) Resuelve la ecuación.

d) Comprueba el resultado.

3 **Calcula el valor de *x* sabiendo que el área total de la figura es 53.**

a) Lee detenidamente el problema.

b) Plantea la ecuación.



Área 1 $\boxed{\quad\quad}$ Área 2 $\boxed{\quad\quad}$ Área 3 $\boxed{\quad\quad}$ Las tres áreas suman 53.

c) Resuelve la ecuación.

d) Comprueba el resultado.

4 Un padre cede a un hijo $\frac{1}{5}$ de su capital, a otro $\frac{1}{4}$ y a un tercer hijo le da el resto, que son 19.800 €. ¿Cuál era su capital?

5 Si a mi edad le resto el cuadrado de su quinta parte resultan 6 años. ¿Qué edad tengo?

6 Halla dos números consecutivos, tales que añadiendo al cuadrado del mayor la mitad del menor resulta 27.

7 María dice a Daniel: «Si al cuadrado de mi edad le resto ocho veces mi edad, el resultado es el triple de la edad que tú tienes». Si la edad de Daniel es 16 años, ¿cuál es la edad de María?

5 Sistemas de ecuaciones

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es uno de los fundamentos de las Matemáticas. A la hora de resolver muchos problemas reales se hace patente la necesidad de los sistemas de ecuaciones.

Los alumnos deben ser capaces de reconocer ecuaciones con dos incógnitas y obtener algunas soluciones de ellas. La obtención de sistemas equivalentes a uno dado es prioritario, ya que permite hallar la solución del sistema dado fácilmente.

Se exponen a lo largo de la unidad los métodos de resolución de sistemas: método de sustitución, método de igualación y método de reducción. Se deben indicar los pasos para resolver un sistema por cada uno de los métodos mencionados, así como señalar sus similitudes y diferencias con los otros métodos. Conviene explicar también a los alumnos que la idoneidad de cada uno de ellos depende de los coeficientes de las incógnitas.

La resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones no resulta especialmente compleja en lo que a su técnica se refiere, pero habrá que insistir en la necesidad de seguir las cuatro fases del método de resolución de problemas, ya vistas en la unidad anterior.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas* x e y se expresa de la forma:
$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$
- *Resolver un sistema* es encontrar dos números que, al reemplazarlos en las dos ecuaciones, satisfagan ambas simultáneamente. Un *sistema* es *compatible* si tiene solución.
- *Método de sustitución*: Despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra. Resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquier ecuación. Comprobar el resultado.
- *Método de igualación*: Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualar las expresiones obtenidas. Resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquier ecuación. Comprobar el resultado.
- *Método de reducción*: Buscar un sistema equivalente donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales y opuestos. Restar o sumar las ecuaciones, eliminando una incógnita y resolver la ecuación. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquier ecuación. Comprobar el resultado.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Identificar sistemas de ecuaciones y sus elementos.	• Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Coeficientes y términos independientes. • Solución de un sistema.	• Identificación de los elementos de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. • Comprobación de las soluciones de un sistema. • Sistemas compatibles.
2. Resolver sistemas mediante el método de sustitución.	• Método de sustitución.	• Resolución de un sistema por el método de sustitución.
3. Resolver sistemas mediante el método de igualación.	• Método de igualación.	• Resolución de un sistema por el método de igualación.
4. Resolver sistemas mediante el método de reducción.	• Método de reducción.	• Resolución de un sistema por el método de reducción. • Obtención de sistemas equivalentes.
5. Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones.	• Planteamiento, resolución y comprobación de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.	• Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones. • Comprobación de la solución.

5 OBJETIVO 1

IDENTIFICAR SISTEMAS DE ECUACIONES Y SUS ELEMENTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de las que se busca una solución común.

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Coeficientes} \text{ de las incógnitas: } a, a', b, b' \\ \textbf{Términos independientes: } k, k' \end{cases}$$

EJEMPLO

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y} &\boldsymbol{= 5} \\ \boldsymbol{x - 2y} &\boldsymbol{= 2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Incógnitas: } x, y \\ \text{Coeficientes de las incógnitas: } 1, 1, 1, -2 \\ \text{Términos independientes: } 5, 2 \end{cases}$$

1 **Determina las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= -1 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica ambas ecuaciones.
- **Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar sus soluciones.
- **Si un sistema tiene solución**, es decir, si se pueden encontrar dos números que cumplan las dos ecuaciones, se dice que es **compatible**.

EJEMPLO

Comprueba si el siguiente sistema de ecuaciones tiene como solución $x = 4$ e $y = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y} &\boldsymbol{= 5} \\ \boldsymbol{x - 2y} &\boldsymbol{= 2} \end{aligned}\right\}$$

Veamos si la solución del enunciado verifica las dos ecuaciones del sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 4,\ y = 1} \left.\begin{aligned} 4 + 1 &= 5 \\ 4 - 2 \cdot 1 &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, $x = 4$ e $y = 1$ es una solución del sistema. El sistema es compatible.

2 **Determina si $x = 0$ e $y = -1$ es solución de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + 4y &= 2 \\ 3y &= -3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + 4y &= -4 \end{aligned}\right\}$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución:

a) **Despejar** la incógnita en una de las dos ecuaciones.
b) **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
e) **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{array}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita x de la segunda ecuación.

$$x = 10 + y$$

b) **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación.

$$x + y = 30 \xrightarrow{x = 10 + y} (10 + y) + y = 30$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} (10 + y) + y &= 30 \\ 10 + y + y &= 30 \\ 10 + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 10 \\ y &= \frac{20}{2} \\ \boxed{y = 10} \end{aligned}$$

d) **Sustituimos** el valor $y = 10$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x + 10 &= 30 \\ \boxed{x = 20} \end{aligned}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hay que sustituir el par de valores (20, 10) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 20,\ y = 10} \left.\begin{array}{r} 20 + 10 = 30 \\ 20 - 10 = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 20$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 **Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\}$$

a) Elegimos para despejar la incógnita *y* en la primera ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y = 5 - x$$

b) Sustituimos esta incógnita en la segunda ecuación.

$$x - 2y = 2 \xrightarrow{y = 5 - x} x - 2(5 - x) = 2$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = }$

d) Sustituimos el valor de *x* obtenido en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la primera.

$x + y = 5$

$\boxed{} + y = 2$

$\boxed{y = }$

Solución del sistema: $\boxed{x = }$ $\boxed{y = }$

e) Comprobamos la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{} + \boxed{} = 5 \\ \boxed{} + 2 \cdot \boxed{} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5 = 5 \\ 2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Si obtenemos este resultado, los valores de *x* e *y* son correctos.

2 **Resuelve los sistemas mediante el método de sustitución y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 8 \\ 2x - y = 9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 7 \\ 3x - y = 4 \end{array}\right\}$

3 **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba la solución del siguiente sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-1}{5}+2y=1 \\ y+\dfrac{3x}{2}=2 \end{array}\right\}$$

a) Sacamos común denominador.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-1}{5}+\dfrac{5\cdot 2y}{5}=\dfrac{5\cdot 1}{5} \\ \dfrac{2\cdot y}{2}+\dfrac{3x}{2}=\dfrac{2\cdot 2}{2} \end{array}\right\}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-1}{\cancel{5}}+\dfrac{10y}{\cancel{5}}=\dfrac{5}{\cancel{5}} \\ \dfrac{2y}{\cancel{2}}+\dfrac{3x}{\cancel{2}}=\dfrac{4}{\cancel{2}} \end{array}\right\}$$

De esta manera obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-1+10y=5 \\ 2y+3x=4 \end{array}\right\}$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. No olvides comprobar la solución.

4 **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba el siguiente sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{3}+\ y=4 \\ x+\dfrac{y}{3}=6 \end{array}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 OBJETIVO 3

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación:

a) **Despejar** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
b) **Igualar** las expresiones obtenidas.
c) **Resolver** la ecuación de una incógnita que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
e) **Comprobar** la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita y de las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 11 - 3x &= y \end{aligned}\right\}$$

b) **Igualamos** las expresiones obtenidas.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 11 - 3x \\ 2x + 3x &= 11 - 1 \\ 5x &= 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2}$$

d) **Sustituimos** el valor $x = 2$ en cualquiera de las ecuaciones. Elegimos la segunda.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11 \\ 3 \cdot 2 + y &= 11 \\ 6 + y &= 11 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 5}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida.

Para ello hay que sustituir el par de valores (2, 5) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 2,\ y = 5} \left.\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 5 &= -1 \\ 3 \cdot 2 + 5 &= 11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \text{Cumple la ecuación.} \\ &\to \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 2$ e $y = 5$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 **Resuelve el sistema mediante el método de igualación y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 77 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$

a) Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 77 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

b) Igualamos las ecuaciones obtenidas.

c) Resolvemos la ecuación de una incógnita obtenida.

d) Sustituimos el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

e) Comprobamos la solución.

2 **Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de igualación y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20 \end{array}\right\}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4\\ x+y=10\end{array}\right\}$$

a) Reducimos a común denominador.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3x}{\cancel{6}}+\dfrac{2y}{\cancel{6}}=\dfrac{24}{\cancel{6}}\\ x+y=10\end{array}\right\}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y=24\\ x+y=10\end{array}\right\}$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. No olvides comprobar la solución.

4 **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba el siguiente sistema.**

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=6\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{9}=6\end{array}\right\}$$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de reducción:

a) **Buscar un sistema equivalente** donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.

b) **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así una incógnita.

c) **Resolver** la ecuación que resulta.

d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobar** la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\}$$

a) **Obtenemos** un sistema equivalente.

Elegimos una incógnita en las dos ecuaciones, en este caso *x*.

Multiplicamos la primera ecuación por 2.

$$\left.\begin{array}{r} 2(x + 2y = 25) \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\}$$

Ahora el sistema equivalente es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\}$$

b) **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar la *x*.

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ \underline{-\ (2x + 3x = 40)} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ \underline{-2x - 3y = -40} \\ y = 10 \end{array}$$

c) **Resolvemos** la ecuación de una incógnita que resulta.

$$\boxed{y = 10}$$

d) **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en este caso en la primera ecuación.

$$x + 2y = 25$$
$$x + 2 \cdot 10 = 25$$
$$\boxed{x = 5}$$

e) **Comprobamos** el resultado.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 5,\ y = 10} \left.\begin{array}{r} 5 + 2 \cdot 10 = 25 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 40 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 25 = 25 \\ 40 = 40 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 5$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1 **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = -10 \\ 4x + 5y = 140 \end{array}\right\}$$

a) Obtenemos un sistema equivalente. Elegimos una incógnita, por ejemplo la *y*.

Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2.

$$\left.\begin{array}{l} 5(3x - 2y = -10) \\ 2(4x + 5y = 140) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 15x - 10y = -50 \\ 8x + 10y = 280 \end{array}\right\} \text{ Sistema equivalente.}$$

b) Sumamos las dos ecuaciones para eliminar la *y*.

$$\begin{array}{rrcl} & 15x - \cancel{10y} & = & -50 \\ + & 8x + \cancel{10y} & = & 280 \\ \hline & 23x & = & 230 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = \quad}$

d) Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtenemos el valor de *y*.

e) Comprobamos la solución.

2 **Resuelve por el método de reducción el sistema y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 26 \\ 2x - 3y = -13 \end{array}\right\}$$

Elegimos una incógnita:

¿Por qué número tenemos que multiplicar las ecuaciones para que esa incógnita desaparezca al sumarlas?

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{}\,(3x + 2y = 26) \\ \boxed{}\,(2x - 3y = -13) \end{array}\right\} \rightarrow$$

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para **resolver un problema** mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hay que realizar los siguientes pasos.

a) **Comprender** el problema.
b) **Plantear** las ecuaciones y formar el sistema de ecuaciones.
c) **Resolver** el sistema de ecuaciones, mediante cualquiera de los tres métodos.
d) **Comprobar** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

EJEMPLO

La suma de las edades de dos hermanos es 29 y, dentro de 8 años, la edad del mayor será el doble que la edad del menor. ¿Cuántos años tiene cada hermano?

a) Leemos el problema las veces que sea necesario hasta comprender su enunciado.

b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.

- Elegimos las incógnitas: x = edad del hermano mayor
  y = edad del hermano menor
- Planteamos el problema:

	HOY		DENTRO DE 8 AÑOS
Hermano mayor	x	$\longrightarrow$	$x + 8$
Hermano menor	y	$\longrightarrow$	$y + 8$
	$x + y = 29$		$x + 8 = 2(y + 8)$
	Las dos edades suman 29.		*La edad del mayor será el doble de la del menor.*

- Formamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x + y = 29 \\ x + 8 = 2(y + 8) \end{array}\right\}$

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones. Eligiendo el método de sustitución, despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda.

$$x = 29 - y \rightarrow (29 - y) + 8 = 2(y + 8)$$
$$29 - y + 8 = 2y + 16$$
$$29 + 8 - 16 = 2y + y \rightarrow 21 = 3y \rightarrow y = 7$$

Sustituimos $y = 7$ en la primera ecuación: $x + 7 = 29 \rightarrow x = 29 - 7 = 22$

Por tanto: $x = 22$ años tiene el hermano mayor.
$y = 7$ años tiene el hermano menor.

d) Comprobamos que la solución cumple las condiciones del enunciado: sustituimos los valores obtenidos de x e y ($x = 22$ e $y = 7$) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 29 \\ x + 8 = 2(y + 8) \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 22,\ y = 7} \left.\begin{array}{l} 22 + 7 = 29 \\ 22 + 8 = 2 \cdot (7 + 8) \end{array}\right\} \rightarrow 30 = 14 + 16 \rightarrow 30 = 30$$

Por tanto, $x = 22$ e $y = 7$ es solución del problema.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1 **Un alumno realiza un examen de diez preguntas. Por cada pregunta acertada le dan 2 puntos y por cada pregunta que falla le quitan 1 punto. Sabiendo que la calificación final fue de 8 puntos, ¿cuántos aciertos y fallos tuvo?**

a) Leemos despacio el problema.

b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.

- Elegimos las incógnitas: $x =$ ....

  $y =$ ....

- Planteamos el problema:

N.º de preguntas acertadas	x	→		Puntuación de preguntas acertadas.
N.º de preguntas falladas	y	→		Puntuación de preguntas falladas.
Total de preguntas: 10	$x + y =$	→		Puntuación total: 8.
	Primera ecuación		Segunda ecuación	

- Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases}$$

c) Ahora resolvemos el sistema. Elegimos el método de resolución más adecuado.

d) Comprobamos el resultado.

2 **En un hotel hay 120 habitaciones dobles e individuales. Si el número total de camas es 195, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?**

a) Leemos despacio el problema.

b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.

- Elegimos las incógnitas: $x =$ ....

  $y =$ ....

- Planteamos el problema:

Habitaciones dobles	x	→		Camas en habitaciones dobles.
Habitaciones individuales	y	→		Camas en habitaciones individuales.
Total de habitaciones: 120		→		Total de camas: 195.
	Primera ecuación		Segunda ecuación	

- Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{} \\ \boxed{} \end{array}\right.$$

c) Elegimos un método de resolución y resolvemos el problema.

d) Comprobamos el resultado.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Calcula dos números cuya suma es 10 y su diferencia es 6.**

4 **En un corral hay 25 ovejas y gallinas y contando las patas hay 80 en total. ¿Cuántas ovejas y gallinas son?**

5 **Paloma tiene monedas de 2 € y 1 €. Sabiendo que tiene 20 monedas y que el valor de todas es 33 €, calcula el número de monedas que tiene de cada tipo.**

	MONEDAS	VALOR DE LAS MONEDAS	
De 1 €			
De 2 €			
Total de monedas: 20			Valor total: 33 €.

6 Proporcionalidad numérica

INTRODUCCIÓN

Es muy importante que los alumnos sean capaces de discernir si dos magnitudes son proporcionales. A veces cometen el error de pensar que, si al aumentar una magnitud, la otra también lo hace, son directamente proporcionales, sin distinguir si ese aumento es proporcional. Conviene insistir en la necesidad de una lectura detallada de los problemas para identificar la relación entre las magnitudes que intervienen.

Se trata, en primer lugar, la proporcionalidad directa y sus aplicaciones: repartos directamente proporcionales, porcentajes y regla de tres simple directa.

La parte final de la unidad se dedica a la proporcionalidad inversa y sus aplicaciones: repartos inversamente proporcionales y regla de tres inversa.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos *magnitudes* son *directamente proporcionales* cuando la razón entre dos cantidades correspondientes es constante: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$.
- Dos *magnitudes* son *inversamente proporcionales* si se cumple que: $x \cdot y = k$.
- La *regla de tres* es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos o más magnitudes.
- Los *porcentajes* o *tantos por ciento* expresan la cantidad de una magnitud que corresponde a 100 unidades de la otra magnitud.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer magnitudes directamente proporcionales.	• Magnitudes directamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Distinción de magnitudes directamente proporcionales. • Realización de tablas de proporcionalidad directa.
2. Aplicar la regla de tres simple directa.	• Regla de tres simple directa.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple directa.
3. Calcular porcentajes.	• Porcentajes.	• Expresión de cantidades en tantos por ciento. • Utilización de los porcentajes para resolver problemas. • Resolución de problemas con aumentos o disminuciones porcentuales.
4. Realizar repartos directamente proporcionales.	• Repartos directamente proporcionales.	• Resolución de problemas utilizando los repartos directamente proporcionales.
5. Reconocer magnitudes inversamente proporcionales.	• Magnitudes inversamente proporcionales.	• Distinción de magnitudes inversamente proporcionales.
6. Aplicar la regla de tres simple inversa.	• Regla de tres simple inversa.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple inversa.
7. Realizar repartos inversamente proporcionales.	• Repartos inversamente proporcionales.	• Resolución de problemas utilizando los repartos inversamente proporcionales.

RECONOCER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando la razón entre dos cantidades correspondientes de ambas es constante:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$

- Esta constante k se denomina **constante de proporcionalidad directa**.

EJEMPLO

Si cada kilo de manzanas vale 40 céntimos, averigua la relación que existe entre el peso de manzanas y el precio.

Para ello, formamos una tabla de dos filas: en una de ellas representamos las cantidades de una magnitud, y en la otra, las cantidades de la otra magnitud.

PESO (en kilos)	1	2	3	4	5
PRECIO (en céntimos)	40	80	120	160	200

Todas las divisiones entre el precio de las manzanas y su peso dan el mismo resultado:

$$\frac{40}{1} = 40 \qquad \frac{80}{2} = 40 \qquad \frac{120}{3} = 40 \qquad \frac{160}{4} = 40 \qquad \frac{200}{5} = 40$$

$$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = \frac{200}{5} = 40 = k$$

Es decir, el peso de las manzanas y su precio son magnitudes directamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad es, en este caso, $k = 40$.

La tabla representada se denomina tabla de proporcionalidad.

1 **Para hacer una tortilla se utilizan 4 huevos. Determina la relación entre estas magnitudes.**

a) Completa la tabla.

HUEVOS	8	16	20		32
TORTILLA	2	4	5	6	

b) Comprueba el resultado de todas las divisiones entre cantidades correspondientes.

$$\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{16}{4} = 4 \qquad \frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{\square}{6} = \square \qquad \frac{32}{\square} = \square$$

c) ¿Son magnitudes directamente proporcionales? $\frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = \frac{\square}{6} = \frac{32}{\square} = \square$

d) Determina la constante de proporcionalidad, k.

2 **Completa las tablas siguientes para que sean tablas de proporcionalidad directa.**

2	4		8	40
6		15		

0	0,25	3		8
	1,25		12	

EJEMPLO

Considera un coche que no circula a velocidad constante, es decir, va frenando y acelerando según el tráfico, de forma que se obtengan los siguientes datos.

HORAS TRANSCURRIDAS	1	2	3	4
KILÓMETROS RECORRIDOS	3	7	15	19

Realizamos todas las divisiones entre las dos magnitudes:

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{7}{2} = 3{,}5 \qquad \frac{15}{3} = 5 \qquad \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Podemos observar que estas divisiones no dan el mismo resultado. Por tanto, las magnitudes de las horas transcurridas y los kilómetros recorridos no son directamente proporcionales.

3 **Por cada ventana instalada nos cobran 500 €, pero si instalamos más de 10 ventanas nos cobran 450 € por cada una. Comprueba si estas magnitudes son directamente proporcionales.**

a) Completa la tabla con los datos numéricos que faltan.

NÚMERO DE VENTANAS	2	4	7	10	11	20
PRECIO	1.000	2.000		5.000	4.950	9.000

b) Halla el resultado de las razones entre cantidades correspondientes.

$$\frac{1.000}{2} = \square \qquad \frac{2.000}{4} = \square \qquad \frac{\square}{7} = \square$$

$$\frac{5.000}{10} = \square \qquad \frac{4.950}{11} = \square \qquad \frac{9.000}{20} = \square$$

c) ¿Son magnitudes directamente proporcionales?

4 **Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.**

a) El lado de un cuadrado y su perímetro.

b) El volumen que ocupa un líquido y su peso.

c) El número de fotocopias y su precio.

5 **Observa la tabla siguiente. Comprueba que las magnitudes *M* y *M′* son directamente proporcionales, y calcula *y* e *y′*.**

MAGNITUD *M*	4	6	7	9	10
MAGNITUD *M′*	12	18	21	y	y'

APLICAR LA REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **regla de tres simple directa** es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos magnitudes directamente proporcionales.

EJEMPLO

Si una docena de naranjas cuesta 3 €, ¿cuánto cuestan 4 naranjas?

Como la cantidad de naranjas y su precio son magnitudes directamente proporcionales, podemos expresar esta relación de la siguiente manera.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } 12 \text{ naranjas} \xrightarrow{\text{cuestan}} 3\ €\\ 4 \text{ naranjas} \xrightarrow{\text{costarán}} x\ €\end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{4} = \frac{3}{x}$$

Ahora despejamos la x:

$$\frac{12}{4} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{12x}{4} = 3 \rightarrow 12x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{12} = 1$$

Las 4 naranjas cuestan 1 €.

1 **En una panadería han pagado 42 € por 70 barras de pan. ¿Cuánto tendrían que pagar si hubiesen comprado 85 barras?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \boxed{} \text{ barras} \xrightarrow{\text{cuestan}} \boxed{}\ €\\ \boxed{} \text{ barras} \xrightarrow{\text{costarán}} \boxed{}\ €\end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Las 85 barras cuestan $\boxed{}$ €.

2 **Si 4 dólares son 3 euros, ¿cuántos euros son 4,5 dólares?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \boxed{} \text{ dólares} \xrightarrow{\text{son}} \boxed{} \text{ euros}\\ \boxed{} \text{ dólares} \xrightarrow{\text{serán}} \boxed{} \text{ euros}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Los 4,5 dólares son $\boxed{}$ euros.

CALCULAR PORCENTAJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Los **porcentajes** o **tantos por ciento** expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales y nos indican la cantidad de una de ellas correspondiente a 100 unidades de la otra.

EJEMPLO

Si el 17 % de un terreno es 23,46 m², ¿cuántos metros cuadrados representan el total del terreno?

$$\left.\begin{array}{lrl} \textbf{\%} & 17 & \longrightarrow 100 \\ \textbf{m}^2 & 23{,}46 & \longrightarrow x \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa, tenemos que: $\dfrac{17}{23{,}46} = \dfrac{100}{x}$.

Despejamos la x: $17x = 100 \cdot 23{,}46$ $\qquad x = \dfrac{2.346}{17} = 138$

Total del terreno es 138 m².

1 **Un depósito de 3.000 litros de capacidad contiene 1.025 litros. ¿Qué tanto por ciento es?**

$$\left.\begin{array}{lrl} \textbf{\%} & 100 & \longrightarrow x \\ \textbf{Litros} & 3.000 & \longrightarrow 1.025 \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa: $\dfrac{100}{3.000} = \dfrac{x}{1.025}$.

Despejamos la x:

Con los 1.025 litros el depósito está al .... %.

2 **En época de sequía, un embalse con capacidad máxima de 200 hectómetros cúbicos estaba al 45 %. ¿Qué capacidad de agua contenía en ese momento?**

$$\left.\begin{array}{lrl} \textbf{Capacidad} & x & \longrightarrow 200 \\ \textbf{\%} & 45 & \longrightarrow 100 \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa: $\dfrac{x}{45} = \dfrac{200}{100}$.

Despejamos la x:

La capacidad de agua es .... hectómetros cúbicos.

3 **A un artículo que vale 30 € se le aplica un 20 % de descuento. ¿Cuánto cuesta el artículo?**

$$\left.\begin{array}{lrl} \textbf{\%} & 100 & \longrightarrow 20 \\ \textbf{Euros} & 30 & \longrightarrow x \end{array}\right\}$$

REALIZAR REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para realizar el reparto de una cantidad *n* de forma directamente proporcional a unas cantidades *a*, *b*, *c*…:

- Se **suman las cantidades** que hay que repartir: $a + b + c + ...$
- Se **divide la cantidad *n* entre esa suma**. Este cociente es la constante de proporcionalidad.
- Para calcular cada parte basta con **multiplicar cada cantidad *a*, *b*, *c*… por esa constante**.

1 **La Unión Europea ha concedido una subvención de 15.000 € para tres pueblos. El pueblo *A* tiene 1.800 habitantes; el *B*, 700, y el *C*, 500. ¿Cómo debe repartirse el dinero?**

$A + B + C = 1.800 + 700 + 500 = 3.000$

- **Pueblo *A***

	Total	***A***	***B***	***C***
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{3.000}{15.000} = \frac{1.800}{x}$$

Despejamos la x:

$$3.000x = 1.800 \cdot 15.000 \rightarrow 3.000x = 27.000.000 \rightarrow x = \frac{27.000.000}{3.000} = 9.000$$

$x = \boxed{}$ €

- **Pueblo *B***

	Total	***A***	***B***	***C***
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{3.000}{15.000} = \frac{700}{y}$$

Despejamos la y:

$y = \boxed{}$ €

- **Pueblo *C***

	Total	***A***	***B***	***C***
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la z:

$z = \boxed{}$ €

2 **Vicente y José abren una cartilla de ahorros en el banco. Vicente ingresa 400 € y José ingresa 800 €. Al cabo de unos años les devuelven 1.380 €. ¿Cómo se los tienen que repartir?**

Vicente + José = 400 + 800 = 1.200

	Total	Vicente	José
Dinero invertido	1.200	400	800
Dinero ganado	1.380	x	y

——— = ———   ——— = ———

Despejamos la x: Despejamos la y:

$x =$ ☐ $y =$ ☐

3 **Tres socios de un negocio aportan 30.000, 20.000 y 10.000 €, respectivamente. Si obtienen unos beneficios de 102.000 €, ¿cuánto le corresponde a cada uno?**

	Total	Socio 1	Socio 2	Socio 3
Dinero invertido	☐	30.000	20.000	10.000
Beneficios	102.000	x	y	z

——— = ———   ——— = ———   ——— = ———

Despejamos la x: Despejamos la y: Despejamos la z:

$x =$ ☐ $y =$ ☐ $z =$ ☐

4 **Un padre reparte el premio de una quiniela entre sus tres hijos de 18, 22 y 25 años para ayudar en su formación universitaria, de forma directamente proporcional a sus edades. Si el menor obtiene 12.000 €, calcula:**

a) ¿Cuánto dinero ha repartido el padre?

b) ¿Cuánto le ha correspondido a cada hijo?

	Total	Hijo 1	Hijo 2	Hijo 3
Años	☐	18	22	25
Dinero	☐	☐	☐	☐

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 5

RECONOCER MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de dos valores correspondientes de ambas es constante:

$$a \cdot a' = b \cdot b' = k$$

Esta constante k se denomina **constante de proporcionalidad inversa**.

EJEMPLO

30 obreros tardan 120 horas en pintar una fachada. Si fuesen 20 obreros tardarían 180 horas, y si fuesen 15 obreros, 240 horas. ¿Qué relación hay entre estas magnitudes?

OBREROS	30	20	15
HORAS	120	180	240

$30 \cdot 120 = 3.600$ $\quad$ $20 \cdot 180 = 3.600$ $\quad$ $15 \cdot 240 = 3.600$ $\quad$ $k = 3.600$

Como los productos que obtenemos son iguales, las magnitudes de número de obreros y número de horas son inversamente proporcionales.

1 **Tardamos 3 horas en hacer el recorrido que hay de casa al colegio a una velocidad de 12 km/h. Si fuésemos a 15 km/h tardaríamos 2,4 horas, y si fuésemos a 4 km/h, 9 horas. Comprueba si estas magnitudes son inversamente proporcionales.**

VELOCIDAD (km/h)	12	15	4
TIEMPO (horas)	3	2,4	9

2 **Para construir una nave en 60 días son necesarias 30 personas. Si pasados 24 días se incorporan 12 personas más, ¿en cuántos días terminarán?**

APLICAR LA REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **regla de tres simple inversa** es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales.

EJEMPLO

Si 4 trabajadores tardan 10 días en hacer un trabajo, ¿cuánto tardarán 3 trabajadores?

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si 4 trabajadores} \xrightarrow{\text{tardan}} 10 \text{ días} \\ \text{3 trabajadores} \xrightarrow{\text{tardarán}} x \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{x}{10}$$

$$4 \cdot 10 = 3 \cdot x \rightarrow 40 = 3x \rightarrow x = \frac{40}{3} = 13{,}3 \text{ días}$$

Los 3 trabajadores tardarán algo más de 13 días.

1 **En un depósito hay agua para 20 personas durante 30 días. ¿Para cuánto tiempo durará el agua si fueran 22 personas?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \boxed{20} \text{ personas} \xrightarrow{\text{tienen para}} \boxed{30} \text{ días} \\ \boxed{} \text{ personas} \xrightarrow{\text{tendrán para}} \boxed{} \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Las 22 personas tendrán agua para $\boxed{}$ días.

2 **Con el agua de un depósito se llenan 60 envases de 5 litros cada uno. ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro (0,75 ℓ) cada una se llenarían con el agua del depósito?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \boxed{5} \text{ litros} \xrightarrow{\text{llenan}} \boxed{60} \text{ envases} \\ \boxed{} \text{ litros} \xrightarrow{\text{llenarían}} \boxed{} \text{ botellas} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Se llenarían $\boxed{}$ botellas de tres cuartos de litro.

OBJETIVO 7

REALIZAR REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Repartir una cantidad n de forma **inversamente proporcional** a otras cantidades a, b, c… es equivalente a **repartirla de forma directamente proporcional a los inversos de las cantidades *a*, *b*, *c*…**
- Cada parte se obtiene dividiendo la constante de proporcionalidad $R = \dfrac{n}{1/a + 1/b + 1/c + \ldots}$ entre su cantidad correspondiente a, b, c…

EJEMPLO

El premio de una carrera es de 550 € y se repartirá entre los tres primeros corredores en acabar la prueba de forma inversamente proporcional al orden de llegada, es decir, inversamente proporcional a 1, 2 y 3. ¿Qué cantidad le corresponde a cada corredor?

Puestos

$$1 \xrightarrow{\text{Inverso}} \frac{1}{1} = 1$$
$$2 \xrightarrow{\text{Inverso}} \frac{1}{2}$$
$$3 \xrightarrow{\text{Inverso}} \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$$

Dividimos la cantidad, 550 €, entre la suma de los inversos: $550 : \dfrac{11}{6} = \dfrac{550 \cdot 6}{11} = 300$.

Al 1.º le corresponde $\dfrac{300}{1} = 300$ €

Al 2.º le corresponde $\dfrac{300}{2} = 150$ €

Al 3.º le corresponde $\dfrac{300}{3} = 100$ €

$$\xrightarrow{\text{Comprobamos}} 300 + 150 + 100 = 550 \text{ €}$$

1 **Un padre acude con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 caramelos que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 9 y 6 años. ¿Cuántos caramelos le da a cada uno?**

Edades

$$9 \xrightarrow{\text{Inverso}} \boxed{}$$
$$6 \xrightarrow{\text{Inverso}} \boxed{}$$

$$\xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}} \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

Dividimos la cantidad, 50, entre la suma de los inversos:

Al hijo de 9 años le corresponden $\boxed{}$

Al hijo de 3 años le corresponden $\boxed{}$

$$\xrightarrow{\text{Comprobamos}} \boxed{} + \boxed{} = 50$$

2 **Reparte 50 en partes inversamente proporcionales a los números 2, 2 y 3.**

Números

2 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\boxed{}$

2 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\boxed{}$ $\xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}}$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

3 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\boxed{}$

Dividimos la cantidad, 50, entre la suma de los inversos:

A 2 le corresponde $\boxed{}$

A 2 le corresponde $\boxed{}$ $\xrightarrow{\text{Comprobamos}}$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = 50$

A 3 le corresponde $\boxed{}$

3 **El coste de la matrícula de una academia de música es menor cuantos más notables se han obtenido en el curso anterior. Tres amigos, Pedro, Sara y Leonor, han obtenido 2, 3 y 5 notables, respectivamente, y entre los tres han pagado 310 €. ¿Cuánto le ha costado la matrícula a cada uno?**

Notables

2 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\boxed{}$

3 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\boxed{}$ $\xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}}$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

5 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\boxed{}$

Dividimos la cantidad, 310, entre la suma de los inversos:

A Pedro le corresponde $\boxed{}$

A Sara le corresponde $\boxed{}$ $\xrightarrow{\text{Comprobamos}}$ $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = 310$

A Leonor le corresponde $\boxed{}$

4 **Los tres camareros de una cafetería, Olga, Juan y Félix, han estado enfermos durante 3, 6 y 9 días del mes de julio, respectivamente. Durante este mes han recibido 275 € de propina que se han de repartir de forma inversamente proporcional a los días no trabajados. ¿Cuántos euros les corresponden a cada uno de ellos?**

Días

$3 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square$

$6 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square$ $\xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}} \square + \square + \square = \square$

$9 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square$

Dividimos la cantidad, 275 €, entre la suma de los inversos:

A Olga le corresponde $\square$

A Juan le corresponde $\square$ $\xrightarrow{\text{Comprobamos}} \square + \square + \square = 275$

A Félix le corresponde $\square$

7 Progresiones

INTRODUCCIÓN

Las sucesiones aparecen en diversos campos, tales como la medicina (evolución de un cultivo bacteriano), genética (distribución de los caracteres), informática (utilización de algoritmos recursivos) y economía (cálculo del interés simple y compuesto). Por ello, lo más importante al comenzar la unidad será la definición de sucesiones numéricas como un conjunto ordenado de números, así como encontrar su regla de formación, trabajando el concepto de término general con distintos casos.

Los alumnos encuentran a veces problemas a la hora de calcular el término general de una sucesión, aunque en las progresiones aritméticas y geométricas la forma de obtenerlo es más sencilla que en sucesiones de otros tipos.

Conviene establecer las similitudes y diferencias entre las progresiones aritméticas y geométricas, dejar claro el proceso de formación, la obtención del término general, la manera de deducir la fórmula de la suma de los n términos de una progresión aritmética y del producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.

El manejo adecuado y reflexivo de las fórmulas de la suma y el producto de n términos se trabaja a lo largo de la unidad con distintos ejemplos, y debe asegurarse que los alumnos no las aplican de manera automática, sin pararse a pensar.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *sucesión* de números reales $a_1, a_2, a_3 \ldots$ es un conjunto ordenado de números reales. Cada uno de los números reales de la sucesión se denomina *término*.
- En algunas sucesiones se puede expresar el *término general* mediante una fórmula. El valor de un término de la sucesión se puede calcular al sustituir n por dicho valor.
- Una *progresión aritmética* es una sucesión de números tal que cada uno de ellos (menos el primero) es igual al anterior más un número fijo, llamado diferencia de la progresión (d).
- El *término general de una progresión aritmética* es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
- La *suma de n términos de una progresión aritmética* es: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.
- Una *progresión geométrica* es una sucesión de números tal que cada uno de ellos (menos el primero) es igual al anterior multiplicado por un número fijo, llamado razón de la progresión (r).
- El *término general de una progresión geométrica* es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
- El *producto de n términos de una progresión geométrica* es: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer sucesiones y calcular sus términos.	• Términos de una sucesión. • Término general. • Sucesiones recurrentes.	• Identificación de una sucesión. • Obtención del término general.
2. Determinar si una progresión es aritmética y calcular sus elementos.	• Progresión aritmética: diferencia. • Término general. • Suma de n términos de una progresión aritmética.	• Identificación de una progresión aritmética. • Obtención del término general de una progresión aritmética. • Cálculo de la suma de n términos de una progresión aritmética.
3. Determinar si una progresión es geométrica y calcular sus elementos.	• Progresión geométrica: razón. • Término general. • Producto de n términos de una progresión geométrica.	• Identificación de una progresión geométrica. • Obtención del término general de una progresión geométrica. • Cálculo del producto de n términos de una progresión geométrica.

RECONOCER SUCESIONES Y CALCULAR SUS TÉRMINOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SUCESIÓN

Una **sucesión** en un conjunto ordenado de números reales: a_1, a_2, a_3, a_4…

Cada uno de los números que forman la sucesión es un **término**.

EJEMPLO

3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, … es una sucesión.

El primer término de esta sucesión es: $a_1 = 3$

El segundo término de esta sucesión es: $a_2 = 2$

El tercer término de esta sucesión es: $a_3 = 1$

El cuarto término de esta sucesión es: $a_4 = 2$

1 **Dada la sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …, escribe sus 10 primeros términos.**

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$a_6 =$ $a_7 =$ $a_8 =$ $a_9 =$ $a_{10} =$

2 **Escribe, para la sucesión 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, …, los términos a_1, a_4, a_7, a_8 y a_{10}.**

$a_1 =$ $a_4 =$ $a_7 =$ $a_8 =$ $a_{10} =$

3 **Dada la sucesión: 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, …, ¿cómo son todos los términos que ocupan las posiciones pares? ¿Y los términos que ocupan las posiciones impares? Escribe los términos a_{18} y a_{23}.**

$a_2, a_4, a_6, \ldots =$ $a_{18} =$

$a_1, a_3, a_5, \ldots =$ $a_{23} =$

4 **Escribe los 3 términos que siguen en la sucesión: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, …**

5 **Escribe los 4 términos que siguen en la sucesión: 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, …**

Existen sucesiones que siguen una regla definida en su formación, es decir, un orden lógico que nos ayuda a obtener el siguiente término. Cuando esto ocurre se puede determinar una fórmula que permite calcular cualquier término a partir del lugar que ocupa en la sucesión.

A esta fórmula se le llama **término general**.

EJEMPLO

En la sucesión 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, … podemos observar que, en las posiciones pares, el valor es 2; sin embargo, en las posiciones impares se van alternando los valores 3 y 1:

$$3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Cuando n es par, su valor es 2:

$a_2 = 2$
$a_4 = 2$
$a_6 = 2$
$a_8 = 2$

Cuando n es impar, su valor es 3 o 1:

$a_1 = 3$
$a_3 = 1$
$a_5 = 3$
$a_7 = 1$

EJEMPLO

Halla el término general de la sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

En esta sucesión, para pasar de un término al siguiente se suma 2:

$a_1 = 2 = \longrightarrow 1 \cdot 2$
$a_2 = 4 = 2 + 2 = \longrightarrow 2 \cdot 2$
$a_3 = 6 = 2 + 2 + 2 = \longrightarrow 3 \cdot 2$
$a_4 = 8 = 2 + 2 + 2 + 2 = \longrightarrow 4 \cdot 2$

$\downarrow$

$a_9 = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9 \cdot 2$

$\downarrow$

$a_n = n \cdot 2$

La fórmula $a_n = 2n$ se llama término general de la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12, … y representa la sucesión de todos los números pares.

Conocido el término general, se puede calcular cualquier término de la sucesión, sabiendo la posición que ocupa. Así, para hallar el término que ocupa la posición 71, basta con sustituir n por 71:

$$a_{71} = 2 \cdot 71 = 142$$

6 **Para la sucesión del ejemplo anterior, calcula los términos que ocupan la posición 12, 18 y 21.**

$a_{12} =$

$a_{18} =$

$a_{21} =$

7 **Sea $a_n = 4n + 1$ el término general de una sucesión. Calcula el término a_{25}.**

8 **Escribe los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = 6n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

b) $a_n = 4 + 7n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

c) $a_n = 5^n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

9 **Escribe una fórmula que exprese el término general de una sucesión, y calcula el valor de los términos 13, 25 y 64 de esa sucesión.**

EJEMPLO

Halla el término general de la sucesión: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

Esta sucesión va alternando los valores 1 y 0, de forma que no podemos obtener un único término general. Por tanto, escribiremos un término general para los términos pares y otro para los términos impares:

$a_n = 1$, si n es impar.

$a_n = 0$, si n es par.

10 **Calcula el término general de la sucesión: 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...**

DETERMINAR SI UNA PROGRESIÓN ES ARITMÉTICA Y CALCULAR SUS ELEMENTOS 7

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tal que cada uno de ellos (menos el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado **diferencia** de la progresión, que se representa por ***d***.

El **término general** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

EJEMPLO

Dada la sucesión 3, 8, 13, 18, 23, 28, …, vemos que es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 5 unidades al anterior, es decir, la diferencia es $d = 5$.

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 8 = 3 + 5 \longrightarrow a_2 = 3 + 1 \cdot 5$

$a_3 = 13 = 8 + 5 = 3 + 5 + 5 \longrightarrow a_3 = 3 + 2 \cdot 5$

$a_4 = 18 = 13 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_4 = 3 + 3 \cdot 5$

$a_5 = 23 = 18 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_5 = 3 + 4 \cdot 5$

$a_6 = 28 = 23 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_6 = 3 + 5 \cdot 5$

El término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 2$.

1 **La siguiente sucesión es aritmética: 10, 8, 6, 4, 2, 0, –2, … Halla la diferencia y el término general.**

La sucesión es aritmética, porque cada término se obtiene sumando al anterior ....

Por tanto, la diferencia es $d =$ ....

Hallamos el término general:

$a_1 = 10 \longrightarrow a_1 = 10$

$a_2 = 8 = 10 - 2 \longrightarrow a_2 = 10 + 1 \cdot (-2)$

$a_3 = 6 = 10 - 2 - 2 \longrightarrow a_3 = 10 + 2 \cdot (-2)$

$a_4 = 4 = 10 - 2 - 2 -$ .... $\longrightarrow a_4 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

$a_5 = 2 = 10 -$ .... – .... – .... – .... $\longrightarrow a_5 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

$a_6 = 0 = 10 -$ .... – .... – .... – .... – .... $\longrightarrow a_6 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

$a_7 = -2 = 10 -$ .... – .... – .... – .... – .... – .... $\longrightarrow a_7 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

El término general es:

$a_n = \boxed{}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 **Considera la sucesión: 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5, … Halla la diferencia y el término general.**

La sucesión es aritmética, porque cada término se obtiene sumando al anterior ……………………

Por tanto, la diferencia es $d =$ ……………………

Hallamos el término general:

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 4{,}5 = 3 + 1{,}5 \longrightarrow a_2 = 3 + 1{,}5$

$a_3 = 6 \quad = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_3 = 3 + 2 \cdot 1{,}5$

$a_4 = 7{,}5 = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_4 = 3 + 3 \cdot 1{,}5$

$a_5 = 9 \quad = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_5 = 3 + 4 \cdot 1{,}5$

$a_6 = 3 + 5 \cdot 1{,}5$

$a_7 = \boxed{}$

El término general es:

$a_n = \boxed{}$

3 **Considera la sucesión: 3, 5, 7, 9, 11, 13, …**

a) ¿Es una progresión aritmética? Si es así, ¿cuál es su diferencia?

b) Calcula su término general.

c) Halla el término 42.

4 **Dada la sucesión: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, \ldots$**

a) Comprueba que es una progresión aritmética.

b) Calcula su término general.

c) Halla los términos 25 y 76.

5 **Escribe una progresión aritmética que tiene como primer término $a_1 = 6$ y la diferencia es 4.**

6, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, …

EJEMPLO

¿Cuál es el tercer término de una sucesión aritmética donde el término 7 es 17 y la diferencia es 1,5?

Se puede proceder de dos formas:

1.ª FORMA: Como la diferencia es 1,5, avanzamos hacia atrás restando 1,5, hasta obtener el valor del tercer término:

$$\begin{array}{cccccccc} & & \xrightarrow{+1,5} & \xrightarrow{+1,5} & \xrightarrow{+1,5} & \xrightarrow{+1,5} & & \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{?} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{17} & \boxed{} \\ & & \xleftarrow[-1,5]{} & \xleftarrow[-1,5]{} & \xleftarrow[-1,5]{} & \xleftarrow[-1,5]{} & & \end{array}$$

2.ª FORMA: Como conocemos la fórmula general de las progresiones aritméticas, la aplicamos al término 7 para hallar el término 1:

Fórmula general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Fórmula aplicada al término 7: $a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 1,5$

$17 = a_1 + 6 \cdot 1,5$

$a_1 = 8$

Conociendo el primer término, sumamos la diferencia, $d = 1,5$, hasta obtener el término 3:

$a_1 = 8$

$a_2 = 8 + 1,5 = 9,5$

$a_3 = 9,5 + 1,5 = 11$

6 **¿Cuál es el quinto término de una sucesión cuyo término 24 es 233 y la diferencia es 1,2?**

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{?}$ .... $\boxed{233}$

Hay demasiada distancia entre los dos términos para utilizar la primera forma; por tanto, la segunda forma es más efectiva.

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{?}$ .... $\boxed{233}$

$a_{24} = a_1 + 23 \cdot d$

$233 = a_1 + 23 \cdot 1,2$

$233 = a_1 + \boxed{}$

$233 - \boxed{} = a_1$

$\boxed{} = a_1$

$a_5 = a_1 + 4 \cdot d$

$a_5 = \boxed{} + 4 \cdot 1,2$

$a_5 = \boxed{}$

EJEMPLO

Dada una sucesión aritmética donde $a_4 = 12$ y $a_{27} = 104$, calcula la diferencia y el primer término.

- Planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}a_4 = a_1 + 3 \cdot d\\ 12 = a_1 + 3 \cdot d\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{r}a_{27} = a + 26 \cdot d\\ 104 = a_1 + 26 \cdot d\end{array}\right\}$$

- Igualamos las dos ecuaciones, despejando a_1 en cada una de ellas:

$$\begin{array}{rcl}12 = a_1 + 3 \cdot d & \longrightarrow & 12 - 3d = a_1\\ 104 = a_1 + 26 \cdot d & \longrightarrow & 104 - 26d = a_1\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} 12 - 3d = 104 - 26d$$

- Despejamos la d:

$$-3d + 26d = 104 - 12$$
$$23d = 92$$
$$d = 4$$

- Sustituimos el valor de d en cualquiera de las ecuaciones para obtener a_1:

$$12 = a_1 + 3 \cdot d \xrightarrow{d\,=\,4} 12 = a_1 + 3 \cdot 4 \rightarrow a_1 = 0$$

7 **En una progresión aritmética, $a_6 = 17$ y $a_9 = 23$. Calcula a_1 y el término general.**

8 **En una progresión aritmética, $a_5 = 10$ y $a_{15} = 40$. Calcula a_1 y el término general.**

La **suma de los *n* primeros términos** de una progresión aritmética se calcula con la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EJEMPLO

Sea la progresión aritmética formada por los números: 3, 8, 13, 18, 23, …

- Sumamos los 5 términos: $S_5 = 3 + 8 + 13 + 18 + 23$
- Los ordenamos de atrás hacia delante: $S_5 = 23 + 18 + 13 + 8 + 3$
- Sumamos las dos expresiones obtenidas:

$$\begin{array}{rl} & S_5 = 3 + 8 + 13 + 18 + 23 \\ + & S_5 = 23 + 18 + 13 + 8 + 3 \\ \hline & 2S_5 = 26 + 26 + 26 + 26 + 26 \end{array}$$

$$2S_5 = 5 \cdot 26 \rightarrow S_5 = \frac{5 \cdot 26}{2}$$

- Aplicamos la fórmula general: $S_5 = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot 5}{2}$
- Igualamos ambas expresiones: $\dfrac{5 \cdot 26}{2} = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot 5}{2} \longrightarrow a_1 + a_5 = 26$
- Comprobamos el resultado: $a_1 = 3,\ a_5 = 23 \rightarrow a_1 + a_5 = 3 + 23 = 26$

EJEMPLO

Calcula la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética: 3, 7, 11, 15, 19, ...

- Calculamos el término general:
  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ $\qquad a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4$
- Obtenemos el término a_{20}: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 4 = 79$
- Aplicamos la fórmula general:

9 **En una progresión aritmética, $a_4 = 21$ y $d = -2$.**

a) Calcula a_1 y el término general.

b) Suma los 30 primeros términos.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

DETERMINAR SI UNA PROGRESIÓN ES GEOMÉTRICA Y CALCULAR SUS ELEMENTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números tal que cada uno de ellos (menos el primero) es igual al anterior multiplicado por un número fijo llamado **razón**, que se representa por ***r***.

El **término general** de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

EJEMPLO

Dada la sucesión 5, 10, 20, 40, 80, 160, …, vemos que es una progresión geométrica porque cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2 unidades, es decir, la razón es $r = 2$.

$a_1 = 5 \longrightarrow a_1 = 5$

$a_2 = 10 = 5 \cdot 2 \longrightarrow a_2 = 5 \cdot 2$

$a_3 = 20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_3 = 5 \cdot 2^2$

$a_4 = 40 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_4 = 5 \cdot 2^3$

$a_5 = 80 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_5 = 5 \cdot 2^4$

$a_6 = 160 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_6 = 5 \cdot 2^5$

El término general es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

1 **La siguiente sucesión es geométrica: 3, 15, 75, 375, 1.875, 9.375, … Halla la razón y el término general.**

La sucesión es geométrica, porque cada término se obtiene multiplicando el anterior por ....

Por tanto, la razón es $r =$ ....

Hallamos el término general:

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 15 = 3 \cdot 5 \longrightarrow a_2 = 3 \cdot 5$

$a_3 = 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_3 = 3 \cdot 5^2$

$a_4 = 375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_4 = 3 \cdot 5^3$

$a_5 = 1.875 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_5 = 3 \cdot 5^4$

$a_6 = 9.375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_6 = 3 \cdot 5^5$

El término general es:

$a_n = \boxed{}$

2 **Escribe los 6 primeros términos de la progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 6$.**

El término general es: $a_n =$

Los 6 primeros términos son:

$a_1 = 2$	$a_2 =$	$a_3 =$
$a_4 =$	$a_5 =$	$a_6 =$

El **producto de los *n* primeros términos** de una progresión geométrica es:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

EJEMPLO

Sea la progresión geométrica formada por los números: 5, 10, 20, 40, 80, …

- Multiplicamos los 5 términos: $P_5 = 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80$
- Ordenamos de atrás hacia delante: $P_5 = 80 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 5$
- Multiplicamos las dos expresiones obtenidas:

$$\begin{array}{rl} P_5 = & 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80 \\ \times\ P_5 = & 80 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 5 \\ \hline P_5 \cdot P_5 = & 400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 400 \end{array}$$

$$P_5^2 = 400^5 \rightarrow P_5 = \sqrt{400^5}$$

- Aplicamos la fórmula general: $P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(5 \cdot 80)^5} = \sqrt{400^5} = 3.200.000$

3 **Para la progresión geométrica: 3, 15, 75, 375, ..., calcula el producto de los 4 primeros términos.**

- Multiplicamos los 4 primeros términos: $P_4 = 3 \cdot 15 \cdot 75 \cdot 375$
- Ordenamos de atrás hacia delante: $P_4 =$
- Multiplicamos las dos expresiones obtenidas:

$$\begin{array}{rl} P_4 = & \\ \times\ P_4 = & \\ \hline P_4^2 = & \end{array}$$

- Aplicamos la fórmula general:

4 **Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión geométrica: 16, 8, 4, 2, 1, ...**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EJEMPLO

Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión geométrica: 5, 10, 20, 40, 80, ...

- Calculamos el término general:
  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ $\quad a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
- Obtenemos el término a_5: $\quad a_5 = 5 \cdot 2^{5-1} = 80$
- Aplicamos la fórmula general: $\quad P_5 = \sqrt{(5 \cdot 80)^5} = 3.200.000$

5 **En una sucesión donde el primer término es 10 y la razón 15, calcula.**

- El término general.

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} =$

- Los términos a_4 y a_7.

  $a_4 = a_1 \cdot r^{n-1} = 10 \cdot 15^{4-1} =$ ....

  $a_7 =$ ....

- El producto de los 7 primeros términos.

  $P_7 = \sqrt{(10 \cdot a_7)^7} =$ ....

6 **Dada una progresión geométrica en la que $a_1 = 3$ y $r = 5$, calcula.**

a) El término general.

b) El término 7.

c) El producto de los 4 primeros términos.

7 **Si en una progresión geométrica $a_4 = 12$ y la razón $r = 3$:**

a) Calcula a_1 y el término general.

b) Halla el producto de los 20 primeros términos.

8 Figuras planas

INTRODUCCIÓN

Las figuras planas y el cálculo de áreas son ya conocidos por los alumnos de cursos anteriores. Conviene, sin embargo, señalar la presencia de las figuras planas en distintos contextos reales y destacar la importancia de conocer sus propiedades y obtener fórmulas que permitan calcular su área de manera sencilla.

Se dedicará especial atención a los triángulos, porque son los polígonos más importantes, ya que cualquier polígono se puede dividir en triángulos. También se estudiará el teorema de Pitágoras y cómo aplicarlo en distintos contextos para resolver problemas.

Más tarde se calcularán áreas de paralelogramos, triángulos, polígonos, círculos y figuras circulares.

Conviene exponer algunos ejemplos reales donde se aplique el cálculo de áreas para poner de manifiesto la utilidad de las fórmulas de la unidad. Para ello, siempre que se resuelva una actividad, será conveniente situarla en un contexto real: parcelas para construcción, dimensiones de una vivienda, área de un cultivo, cantidad de material para construir un objeto…

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Las *medianas* son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto a él. Se cortan en el *baricentro*.
- Las *mediatrices* son las rectas perpendiculares a cada lado por su punto medio. Se cortan en el *incentro.*
- Las *alturas* son las rectas perpendiculares a cada lado por el vértice opuesto. Se cortan en el *ortocentro*.
- Las *bisectrices* son las rectas que dividen cada ángulo en dos partes iguales. Se cortan en el *circuncentro*.
- *Teorema de Pitágoras*: en un triángulo rectángulo se cumple que: $a^2 = b^2 + c^2$.
- Se pueden hallar las *áreas* de:
  – Cuadriláteros.
  – Triángulos.
  – Polígonos.
  – Círculos.
  – Figuras circulares.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Determinar las rectas y puntos notables en triángulos.	• Rectas y puntos notables en un triángulo.	• Determinación gráfica de las rectas y puntos notables de un triángulo.
2. Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras.	• Teorema de Pitágoras.	• Resolución de problemas geométricos aplicando el teorema de Pitágoras. • Aplicación del teorema de Pitágoras en problemas de la vida cotidiana.
3. Calcular áreas de polígonos y figuras circulares.	• Áreas de cuadriláteros. • Áreas de polígonos regulares. • Áreas de polígonos cualesquiera. • Área del círculo, de un sector circular y de una corona circular.	• Cálculo del área de paralelogramos y triángulos. • Cálculo del área de polígonos regulares. • Cálculo del área de polígonos por triangulación o descomponiéndolos en figuras de áreas conocidas. • Obtención del área del círculo, de un sector circular y de una corona circular.

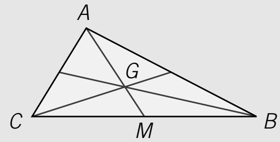
DETERMINAR LAS RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN TRIÁNGULOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MEDIANAS

La **mediana** es la recta que une cada uno de los vértices del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

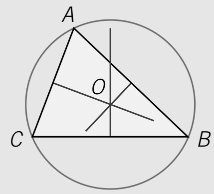
Las medianas se cortan en un punto que se llama **baricentro**.



MEDIATRICES

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al mismo que pasa por su punto medio.

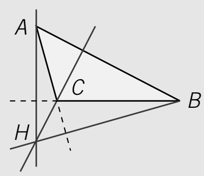
Las mediatrices se cortan en un punto que se llama **circuncentro**.



ALTURAS

La **altura** correspondiente al vértice de un triángulo es la recta perpendicular al lado opuesto que pasa por ese vértice.

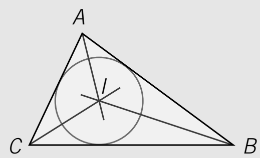
Las alturas se cortan en un punto que se llama **ortocentro**.



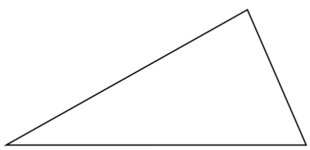
BISECTRICES

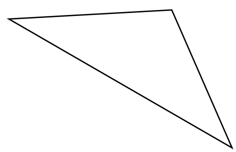
La **bisectriz** de un ángulo es la recta que pasa por su vértice y lo divide en dos partes iguales.

Las bisectrices se cortan en un punto llamado **incentro**.

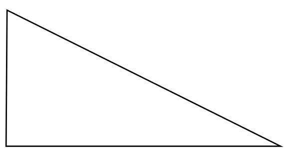


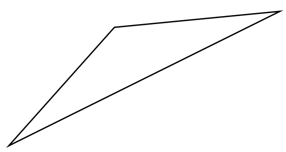
1 **Dibuja las medianas y el baricentro de los siguientes triángulos.**



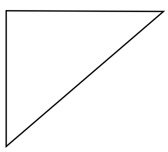


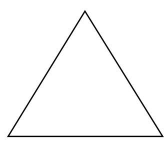
2 **Dibuja las mediatrices y el circuncentro de los triángulos.**



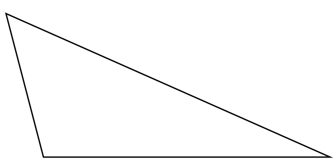


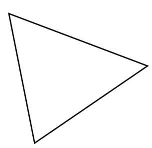
3 **Dibuja las alturas y el ortocentro de los triángulos.**





4 **Dibuja las bisectrices y el incentro de los siguientes triángulos.**



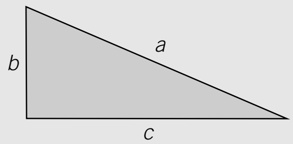


OBJETIVO 2

CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

En un triángulo rectángulo, el lado de mayor longitud, opuesto al ángulo recto, se llama hipotenusa, y los otros dos lados se denominan catetos.



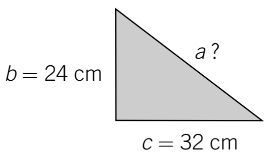
Hipotenusa $\rightarrow$ ***a***

Catetos $\longrightarrow$ ***b, c***

El **teorema de Pitágoras** expresa que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

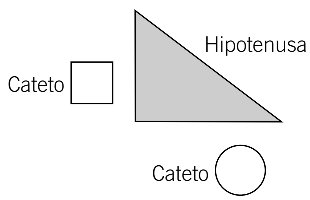
$$a^2 = b^2 + c^2$$

1 **Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 24 cm.**



$$a^2 = b^2 + c^2 = \square^2 + \square^2$$

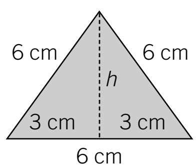
2 **Halla la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos se diferencian en 2 cm y el menor mide 6 cm.**



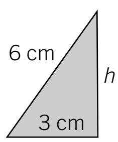
$$a^2 = \square + \bigcirc$$

3 **Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm.**

Para calcular el área tenemos que conocer la base, que en este caso mide 6 cm, y la altura, h, que hallamos con el teorema de Pitágoras.



Estudiamos este triángulo, que es rectángulo:



Aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos la altura, h:

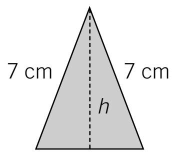
$6^2 = 3^2 + h^2 \rightarrow h = \square$

Calculamos el área aplicando la fórmula general: $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

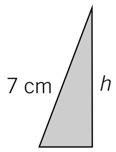
Área =

4 **En un triángulo isósceles, los lados iguales miden 7 cm y el otro lado mide 4 cm. Calcula su área.**

Tomamos el lado desigual como base, $b = 4$ cm, y calculamos la altura, h, utilizando el teorema de Pitágoras.



Considerando esta parte del triángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos h.



$$7^2 = 2^2 + h^2$$

$$h = \boxed{}$$

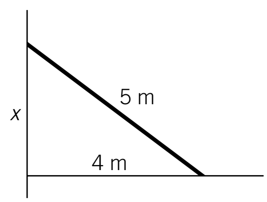
Calculamos el área aplicando la fórmula general: $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

Área =

5 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de los catetos mide 7,5 cm. Calcula la longitud del otro cateto.**

6 **El área de un triángulo rectángulo es 12 cm² y uno de los catetos mide 6 cm. Halla la longitud de la hipotenusa.**

7 **Una escalera de 5 metros de largo está apoyada en una pared, estando situada la base a 4 metros de la misma. ¿A qué altura llega la escalera?**

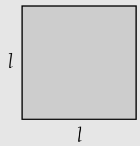


CALCULAR ÁREAS DE POLÍGONOS Y FIGURAS CIRCULARES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

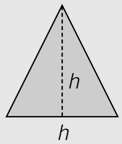
ÁREAS DE CUADRILÁTEROS

Área del cuadrado



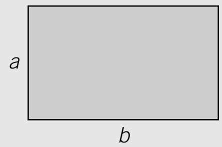
$$A = l \cdot l$$

Área del triángulo



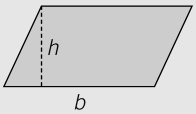
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Área del rectángulo



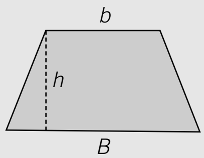
$$A = b \cdot a$$

Área del paralelogramo



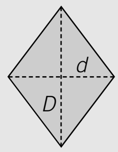
$$A = b \cdot h$$

Área del trapecio



$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

Área del rombo



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

1 **Calcula el área de los siguientes polígonos.**

a) Trapecio de bases 12 cm y 8 cm y altura 5 cm.
b) Rombo de diagonales 12 cm y 9 cm.
c) Rombo de diagonal mayor 8 cm y lado 5 cm.

ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

- Un **polígono** es **regular** cuando sus lados tienen la misma longitud y sus ángulos son iguales.
- El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por la apotema:

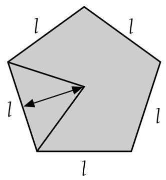
$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

ÁREA DE UN POLÍGONO CUALQUIERA

Si el polígono cuya área queremos calcular no es regular, la fórmula anterior no nos sirve.
Su área se puede hallar descomponiéndolo en triángulos o figuras de áreas conocidas, calculando el área de cada una de esas figuras y sumando las áreas resultantes.

EJEMPLO

Calcula el área del siguiente pentágono regular.

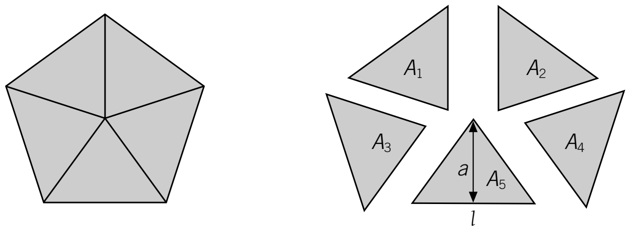


Lado: l

Perímetro: $P = l + l + l + l + l = 5l$

Apotema: a

Vemos que son cinco triángulos iguales: Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{l \cdot a}{2}$

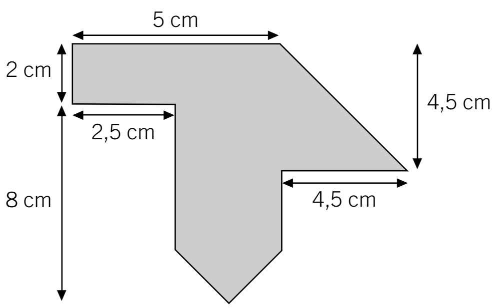


Área del pentágono $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

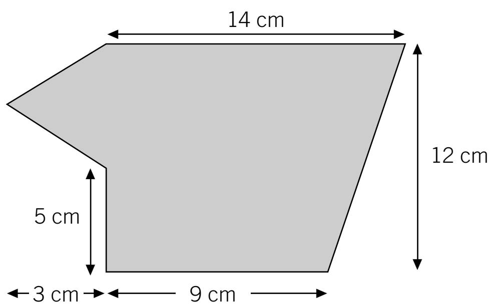
Área del pentágono $= \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} = \dfrac{5l \cdot a}{2} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

2 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

a)

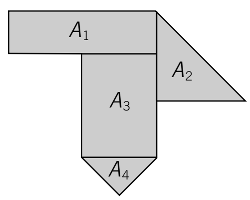


b)

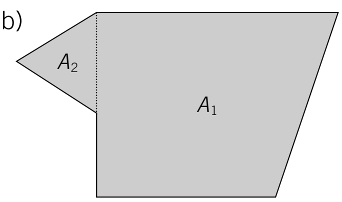


Lo primero que tenemos que hacer es dividir la superficie en polígonos de los que sepamos calcular su área.

a)



b)

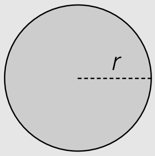


Calculamos el área total:

a) $A_1 =$ ☐
$A_2 =$ ☐
$A_3 =$ ☐
$A_4 =$ ☐
$\rightarrow A =$

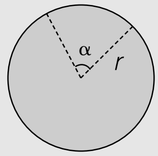
b) $A_1 =$ ☐
$A_2 =$ ☐
$\rightarrow A =$

Área del círculo



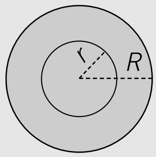
$A = \pi \cdot r^2$

Área del sector circular



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$$

Área de la corona circular



$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

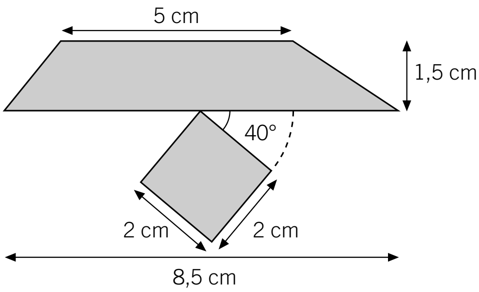
3 **Obtén el área de un círculo cuyo diámetro mide igual que el perímetro de un cuadrado de lado 7 cm.**

4 **Determina el área de un sector circular de amplitud un ángulo recto y cuyo radio es 10 cm.**

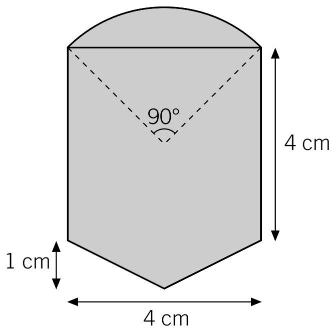
5 **Halla el área de una corona circular limitada por dos circunferencias de radios 2 cm y 1 cm.**

6 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

a)



b)



9 Cuerpos geométricos

INTRODUCCIÓN

Los cuerpos geométricos están presentes en múltiples contextos de la vida real, de ahí la importancia de estudiarlos. Es interesante construir distintos cuerpos geométricos a partir de su desarrollo en papel o cartón y, de esta forma, facilitar el posterior aprendizaje y razonamiento del proceso de obtención de áreas y volúmenes, sin necesidad de aprender las fórmulas de memoria.

En los poliedros regulares se prestará especial atención al estudio de los prismas y las pirámides, caracterizando sus elementos y señalando las similitudes y diferencias.

Se estudiarán también los cuerpos que se obtienen al girar una figura alrededor de un eje, los cuerpos de revolución: cilindro, cono y esfera.

La aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio es uno de los contenidos de la unidad que puede presentar mayores dificultades; por ello se explica, paso a paso, en diversos ejercicios en los que se guía al alumno para que los complete.

RESUMEN DE LA UNIDAD

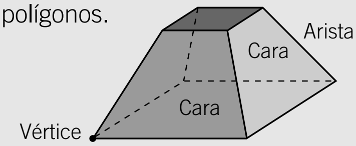
- Un *poliedro* es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos, denominados *caras* del poliedro. Los lados y vértices de las caras son las *aristas* y *vértices* del poliedro.
- En todo polígono convexo se cumple la *fórmula de Euler*: $C + V = A + 2$.
- Un *poliedro* es *regular* si sus caras son polígonos regulares iguales: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.
- Para *calcular longitudes en el espacio*, y siempre que se formen triángulos rectángulos, se puede aplicar el *teorema de Pitágoras*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Clasificar poliedros.	• Caras, aristas y vértices. • Poliedros cóncavos, convexos y regulares. • Fórmula de Euler.	• Distinción de los poliedros y sus tipos. • Comprobación de si los poliedros cumplen la fórmula de Euler.
2. Diferenciar los elementos y tipos de prismas y pirámides.	• Prismas: elementos y tipos. • Pirámides: elementos y tipos.	• Reconocimiento de los distintos tipos de prismas y pirámides y sus elementos principales.
3. Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras en el espacio.	• Cálculo de la diagonal de un ortoedro. • Cálculo de la altura de una pirámide.	• Aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio para hallar longitudes.
4. Calcular el área de prismas y pirámides.	• Área lateral y área total de un prisma recto. • Área lateral y área total de una pirámide recta.	• Utilización de las fórmulas de las áreas de prismas y pirámides para resolver problemas geométricos.
5. Calcular el área de cuerpos redondos.	• Área lateral y área total: cilindro y cono. • Área de una esfera.	• Utilización de las fórmulas de las áreas de cilindros, conos y esferas para resolver problemas geométricos.
6. Calcular el volumen de cuerpos geométricos.	• Volumen del ortoedro, del prisma y del cilindro. • Volumen del cono y de la pirámide. • Volumen de la esfera.	• Utilización de las fórmulas de los volúmenes de cuerpos geométricos para resolver problemas.

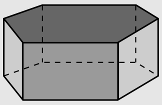
9 OBJETIVO 1
CLASIFICAR POLIEDROS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

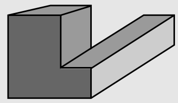
- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.
  Los polígonos que limitan al poliedro se llaman **caras**.
  Los lados de las caras se denominan **aristas**.
  Los vértices de las caras se denominan **vértices**.



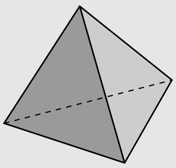
- **Poliedro convexo:** al prolongarse sus caras no cortan al poliedro.



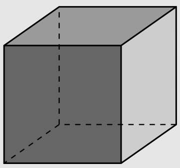
- **Poliedro cóncavo:** al prolongarse sus caras, alguna de ellas corta al poliedro.



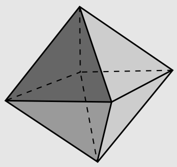
- **Poliedros regulares:** todas las caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se une el mismo número de caras.
  Solo existen cinco poliedros regulares:



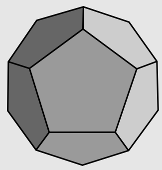
Tetraedro



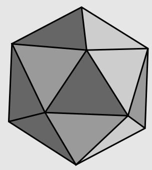
Cubo



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

FÓRMULA DE EULER

En todo **poliedro convexo** se cumple siempre una relación, conocida con el nombre de fórmula de Euler, que relaciona el número de caras (C), el número de aristas (A) y el número de vértices (V):

$$\underset{\text{N.º de caras}}{\boldsymbol{C}} + \underset{\text{N.º de vértices}}{\boldsymbol{V}} = \underset{\text{N.º de aristas}}{\boldsymbol{A}} + \mathbf{2}$$

EJEMPLO

Comprueba que se cumple la fórmula de Euler para el tetraedro.

N.º de caras $= 4$ N.º de vértices $= 4$ N.º de aristas $= 6$

$C + V = A + 2 \rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \rightarrow 8 = 8$

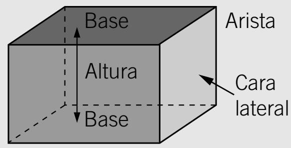
1 **Comprueba que el resto de poliedros regulares verifican la fórmula de Euler.**

POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	FÓRMULA DE EULER: $C + V = A + 2$
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

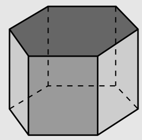
DIFERENCIAR LOS ELEMENTOS Y TIPOS DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

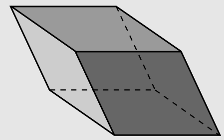
PRISMAS



- Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras, que son polígonos iguales y paralelos entre sí, llamadas **bases**; sus otras **caras laterales** son paralelogramos.
- La **altura de un prisma** es la distancia entre las bases.
- **Prisma recto:** las caras laterales son todas rectángulos y, por tanto, perpendiculares a las bases.
- **Prisma oblicuo:** las caras laterales no son todas rectángulos.
- **Según la forma de la base**, los prismas se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales…

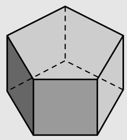


Prisma recto



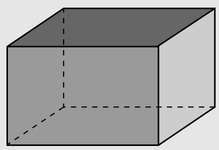
Prisma oblicuo

- **Prisma regular:** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

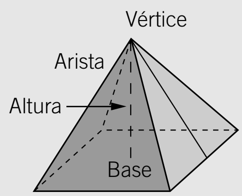


Prisma pentagonal regular

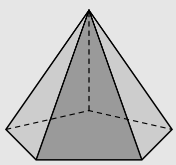
- **Paralelepípedos:** son los prismas cuyas bases son paralelogramos.
- **Ortoedro:** es un paralelepípedo recto.



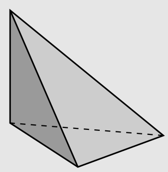
PIRÁMIDES



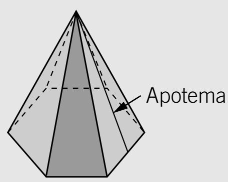
- Una **pirámide** es un poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común, llamado **vértice de la pirámide**.
- La **altura de una pirámide** es la distancia de su vértice a la base.
- **Pirámide recta:** las caras laterales son todas triángulos isósceles.



- **Pirámide oblicua:** las caras laterales no son todas triángulos isósceles.



- **Según la forma de la base**, las pirámides se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales...
- **Pirámide regular:** es una pirámide cuya base es un polígono regular.
- **Apotema:** es la altura de cualquiera de las caras laterales de una pirámide regular.

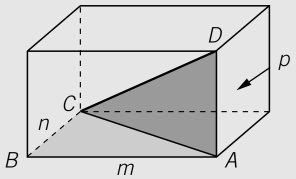


CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL ESPACIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

El teorema de Pitágoras se puede aplicar en todos los contextos en los que se forman triángulos rectángulos. Tiene muchas aplicaciones para calcular longitudes de cuerpos en el espacio.

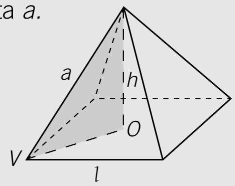
- **Cálculo de la diagonal de un ortoedro**, conocidas las longitudes de sus lados *m*, *n* y *p*.



$$CA = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$CD = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

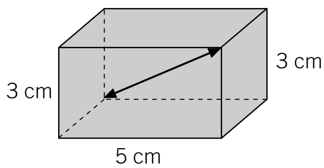
- **Cálculo de la altura de una pirámide cuadrangular regular**, conocidas las longitudes del lado de la base y la arista *a*.



$$h^2 = a^2 - OV^2 = a^2 - \frac{l^2}{2} \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{2}}$$

EJEMPLO

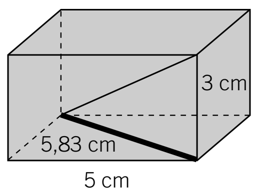
Calcula la diagonal del ortoedro de la figura.



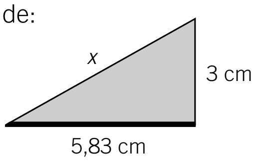
- Consideramos la cara inferior del ortoedro:

- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 9 + 25 \rightarrow h^2 = 34 \rightarrow h = \sqrt{43} \rightarrow h = 5{,}83 \text{ cm}$$



- Vemos que la diagonal es la hipotenusa de:

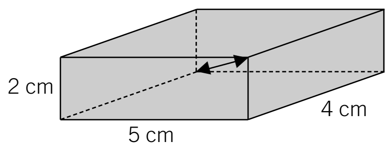


- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

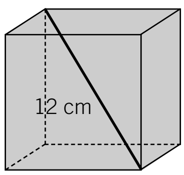
$$x^2 = 3^2 + 5{,}83^2 \rightarrow x^2 = 9 + 34 \rightarrow x^2 = 43 \rightarrow x = \sqrt{43} \rightarrow x = 6{,}56 \text{ cm}$$

La diagonal mide $x = \sqrt{3^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{43} = 6{,}56$ cm.

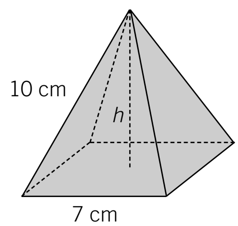
1 **Calcula la diagonal de este ortoedro.**



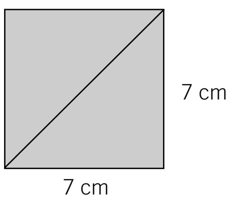
2 **Halla la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 12 cm.**
(Recuerda que en un cubo todos sus lados miden lo mismo.)



3 **Dada una pirámide de base cuadrada, de lado 7 cm y arista lateral 10 cm, halla la diagonal.**

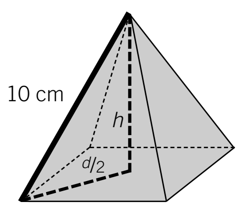


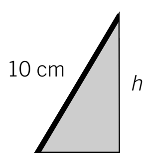
- Tomamos la base y aplicamos el teorema de Pitágoras:



$d^2 = \ldots + \ldots$

- Ahora tenemos:





$d/2 =$

$10^2 = \square + h^2$

- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

9

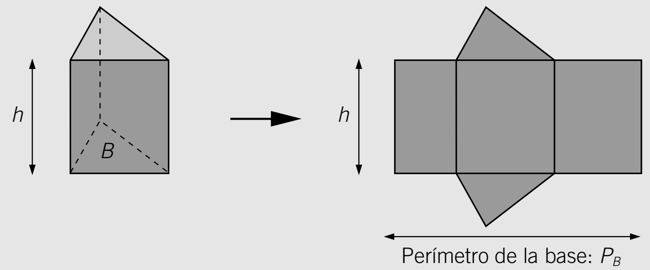
OBJETIVO 4

CALCULAR EL ÁREA DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DE PRISMAS RECTOS

Para hallar el área de un prisma recto nos fijamos en su desarrollo: el prisma recto está formado por un rectángulo y dos polígonos que son sus bases.



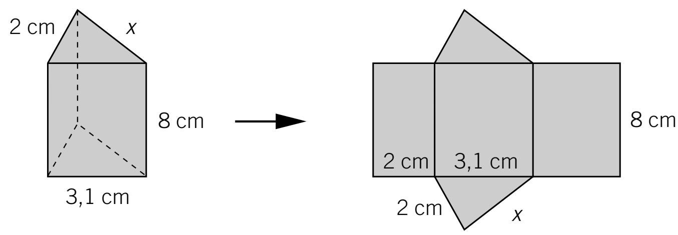
- **Área lateral:** es el área del rectángulo, uno de cuyos lados coincide con el perímetro de la base y el otro con la altura del prisma.

$$A_L = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = P_B \cdot h$$

- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de las bases.

$$A_T = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área de la base} = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B$$

1 **Dado este prisma recto con base un triángulo rectángulo, halla el área total.**

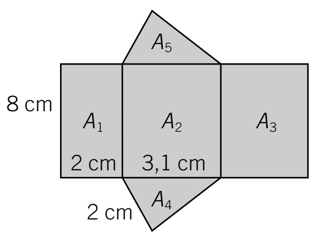


- Para hallar el valor de x, que es uno de los catetos del triángulo rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

  $(3{,}1)^2 = x^2 + 2^2$

  $x =$ ....

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos para obtener el área total:



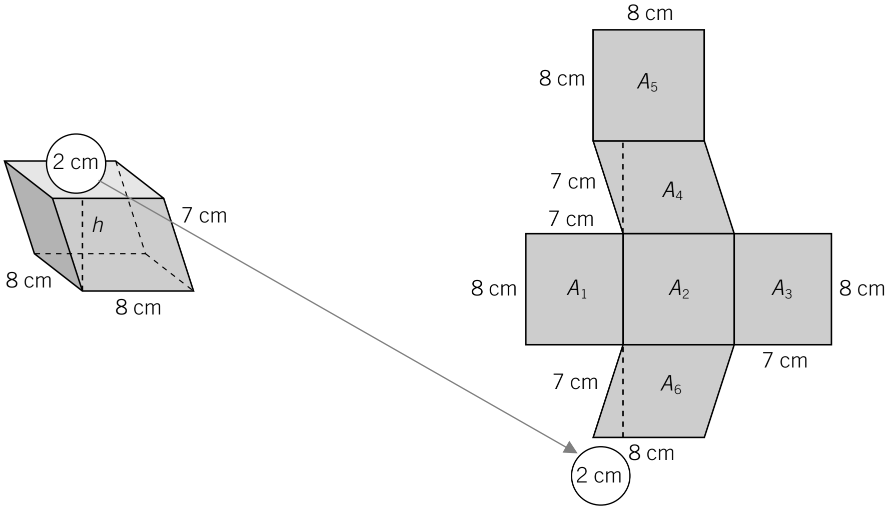
A_1, A_2, A_3 son rectángulos. Su área es el producto de base por altura.
A_4, A_5 son triángulos rectángulos. Su área es la base por la altura dividido entre 2, es decir, el producto de los catetos dividido entre 2.

$A_1 =$ $\qquad$ $A_2 =$ $\qquad$ $A_3 =$

$A_4 =$ $\qquad$ $A_5 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \boxed{}$

2 **Calcula el área del prisma oblicuo de base cuadrangular de la figura.**



- Para hallar el valor de *h* aplicamos el teorema de Pitágoras:

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos:

$A_1 =$ ……… · ………. = $\qquad$ $A_4 =$ ……… · ………. =

$A_2 =$ ……… · ………. = $\qquad$ $A_5 =$ ……… · ………. =

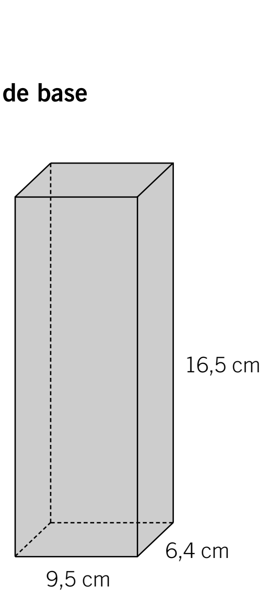
$A_3 =$ ……… · ………. = $\qquad$ $A_6 =$ ……… · ………. =

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \boxed{}$

3 **Halla el área lateral y el área total de un ortoedro de 6,4 × 9,5 cm de base y 16,5 cm de altura.**

Área lateral = perímetro de la base · altura =

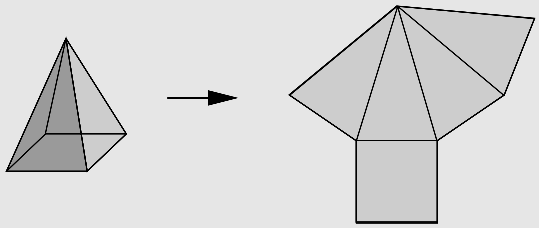
Área total = área lateral + 2 · área de la base =



ADAPTACIÓN CURRICULAR

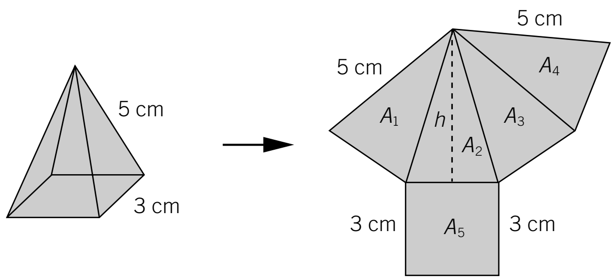
ÁREA DE PIRÁMIDES RECTAS

Para hallar el área de una pirámide recta nos fijamos en su desarrollo: está formada por la base y tantos triángulos como lados tiene la base.

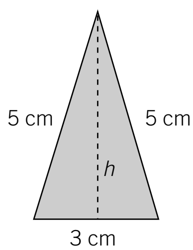


- **Área lateral:** es el área formada por la suma de las áreas de los triángulos.
- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de la base: $\boldsymbol{A_T = A_L + A_B}$.
- Si el polígono de la base es regular, el cálculo es más sencillo, ya que todas las caras laterales son iguales y basta con hallar el área de un triángulo y multiplicar por el número de triángulos para obtener el área lateral.

4 **Calcula el área de la pirámide de base cuadrada de la figura. Ten en cuenta que la base es un polígono regular.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de h:



$5^2 = \boxed{}^2 + h^2$

$A_1 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$ $\qquad$ $A_2 =$ $\qquad$ $A_3 =$

$A_4 =$ $\qquad$ $A_5 =$

$\text{Área total} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \boxed{}$

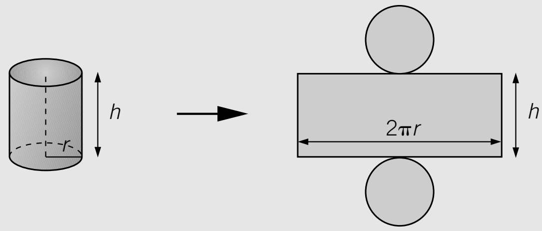
OBJETIVO 5

CALCULAR EL ÁREA DE CUERPOS REDONDOS 9

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DEL CILINDRO

Para hallar el área del cilindro nos fijamos en su desarrollo: está formado por un rectángulo y dos círculos.



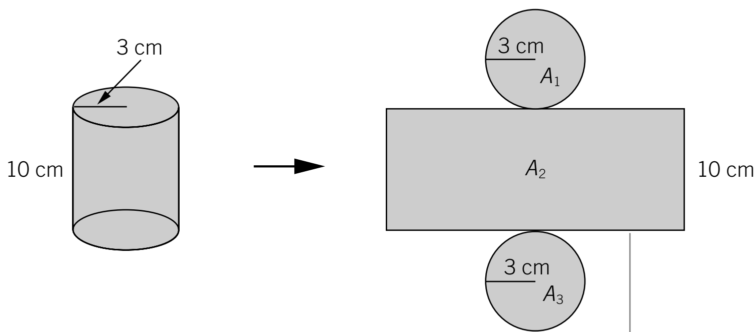
- **Área lateral:** es un rectángulo, en el que uno de sus lados es igual a la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$), y el otro es la altura (h).

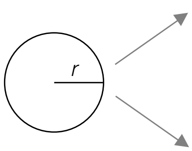
$$\boldsymbol{A_L = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = 2\pi r \cdot h}$$

- **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y las áreas de las dos bases.

$$\boldsymbol{A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)}$$

1 **Completa el ejercicio y halla el área total del cilindro.**





Área $= \pi r^2 =$

Perímetro $= 2\pi r =$

Es igual que el perímetro de A_1.

$2 \cdot \pi \cdot 3 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3$

$A_1 = \pi r^2 =$

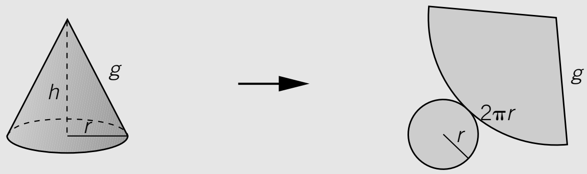
$A_2 = 2\pi r \cdot h =$

$A_3 = \pi r^2 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 = \boxed{}$

ÁREA DEL CONO

Para hallar el área de un cono nos fijamos en su desarrollo: está formado por un sector circular y un círculo, que es la base.

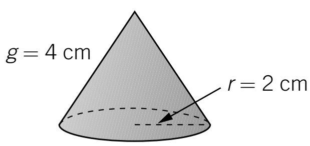


- **Área lateral:** la calculamos como si fuese el área de un triángulo, en el que la longitud de la base es la de la circunferencia ($2\pi r$) y la altura es el radio del sector.

$$\boldsymbol{A_T = \frac{\text{longitud de la base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g}$$

- **Área total:** $\boldsymbol{A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)}$

2 **El área lateral del cono de la figura es:**



a) 8 cm^2

b) 25,12 cm^2

c) 12,56 cm^2

d) 34 cm^2

3 **El área total del cono anterior es:**

a) 20 cm^2 b) 50,24 cm^2 c) 36,55 cm^2 d) 37,68 cm^2

4 **Halla el área total de un cono con $r = 5$ cm y $h = 12$ cm.**

ÁREA DE LA ESFERA

El área de una esfera de radio r es igual a cuatro veces el área del círculo del mismo radio que la esfera:

$$\boldsymbol{A = 4\pi r^2}$$

EJEMPLO

Calcula el área de una esfera de radio 10 cm.

$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 1.256$ cm^2

5 **El área de una esfera de radio 15 cm es:**

a) 2.826 cm^3 b) 28,26 cm^2 c) 2.826 cm^2 d) 14,13 cm^2

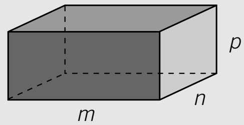
CALCULAR EL VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

VOLUMEN DEL ORTOEDRO

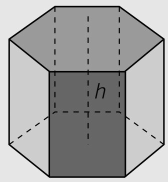
Si un ortoedro tiene de dimensiones *m*, *n* y *p*, su volumen *V* es igual al área de la base ($m \cdot n$) por la altura *p*.

$\boldsymbol{V}$ **= área de la base · altura =** $\boldsymbol{m \cdot n \cdot p}$



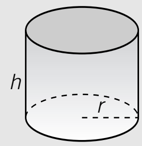
VOLUMEN DEL PRISMA

$\boldsymbol{V}$ **= área de la base · altura =** $\boldsymbol{A_{\text{Base}} \cdot h}$



VOLUMEN DEL CILINDRO

$\boldsymbol{V}$ **= área de la base · altura =** $\boldsymbol{\pi r^2 \cdot h}$



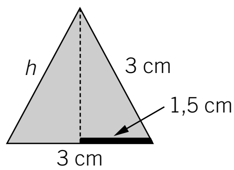
EJEMPLO

Calcula el volumen de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 8 cm.

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^3$$

Halla el volumen de un prisma recto de altura 15 cm y base triangular regular de lado 3 cm.

Para calcular la altura debemos aplicar el teorema de Pitágoras: $3^2 = 1{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = 2{,}6$ cm



$$V = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \cdot h = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 15 = 58{,}5 \text{ cm}^3$$

Determina el área de un cilindro de altura 7 cm y radio de la base 4 cm.

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 351{,}68 \text{ cm}^3$$

1 **El volumen de un ortoedro de dimensiones 4, 8 y 12 cm, respectivamente, es:**

a) 384 cm^3 b) 24 cm^3 c) 192 cm^3 d) 768 cm^3

2 **El volumen de un prisma hexagonal regular de arista básica 10 cm y altura 8 cm es:**

a) 2.078,4 cm^3 b) 4.156,8 cm^3 c) 480 cm^3 d) 692,8 cm^3

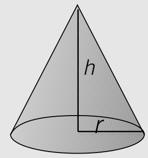
3 **El volumen de un cilindro de altura 6 cm y radio de la base 3 cm es:**

a) 56,52 cm^3 b) 169,56 cm^3 c) 113,04 cm^3 d) 339,12 cm^3

VOLUMEN DEL CONO

El volumen de un cono es igual a la tercera parte del área de la base, que es un círculo (πr^2), por la altura (h).

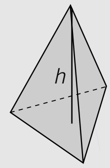
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

El volumen de la pirámide se calcula igual que el de un cono, pero teniendo en cuenta que la base puede ser un polígono cualquiera.

$$V = \frac{A_{\text{Base}} \cdot h}{3}$$



EJEMPLO

Calcula el volumen de un cono de altura 10 cm y radio de la base 2 cm.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10}{3} = 41{,}87 \text{ cm}^3$$

Halla el volumen de una pirámide de altura 8 cm y base regular triangular de lado 2 cm.

$$A_{\text{Base}} = \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del triángulo de la base aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$2^2 = 1^2 + h^2 \rightarrow h = 1{,}73 \text{ cm} \rightarrow V = \frac{A_{\text{Base}} \cdot h}{3} = \frac{1{,}73 \cdot 8}{3} = 4{,}61 \text{ cm}^3$$

4 **El volumen de un cono de altura 15 cm y radio de la base 12 cm es:**

a) 4.069,44 cm^3 b) 2.260,8 cm^3 c) 6.782,4 cm^3 d) 1.356,48 cm^3

5 **El volumen de una pirámide de base cuadrangular de lado 8 cm y altura 8 cm es igual a:**

a) 170,67 cm^3 b) 85,33 cm^3 c) 341,34 cm^3 d) 42,68 cm^3

VOLUMEN DE LA ESFERA

El volumen de una esfera es: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

EJEMPLO

Calcula el volumen de una esfera de radio 3 cm.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 113{,}04 \text{ cm}^3$$

6 **El volumen de una esfera de radio 7 cm es:**

a) 718,01 cm^3 b) 143,603 cm^3 c) 1.436,03 cm^3 d) 339,12 cm^3

7 **El volumen de una esfera de área 2.826 cm^2 es:**

a) 14.130 cm^3 b) 42.390 cm^3 c) 28.260 cm^3 d) 86.340 cm^3

10 Movimientos y semejanzas

INTRODUCCIÓN

Esta unidad tiene un componente gráfico muy importante, por lo que conviene comenzar la unidad aportando ejemplos reales, sobre todo en contextos de tipo artístico, para que los alumnos puedan asimilar los conceptos de movimientos y semejanzas que se explican.

La exposición se inicia con la definición de un vector y sus elementos: módulo, dirección y sentido. Después, se calcularán sus componentes y módulo en un sistema de coordenadas.

A continuación se estudiarán los movimientos en el plano, que son transformaciones que conservan las distancias y los ángulos: traslaciones, giros y simetrías, respecto a un punto y respecto a una recta o eje. Se proponen en la unidad diversos ejercicios para obtener las coordenadas de la figura transformada.

Posteriormente, se tratan las semejanzas, que conservan la forma pero no el tamaño. Una de las aplicaciones reales de las semejanzas son las escalas y su uso en distintos contextos. Son de gran utilidad para trabajar y representar mapas, planos, etc.

Conviene dejar claras las diferencias conceptuales entre movimientos y semejanzas, y las aplicaciones de estas últimas: figuras semejantes y polígonos semejantes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos puntos A y B determinan un *vector* fijo. A es el origen y B es el extremo del vector.
- Los *elementos de un vector* son su módulo (longitud del segmento AB), dirección (la de la recta AB) y sentido (el que va del punto A a B).
- Dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las *componentes del vector* son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
- Una *traslación de vector* $\vec{v}$ transforma cualquier punto P en otro punto P', tales que PP' tiene el mismo módulo, dirección y sentido que $\vec{v}$.
- Un *giro de centro O y ángulo* α es el movimiento que asocia a cada punto P otro punto P' situado a igual distancia de O que el punto P, de forma que el ángulo que forman PP' es α.
- *Simetría respecto a un punto O* es el movimiento que asocia a cada punto P otro punto P', a la misma distancia de O, tales que P, O y P' están alineados.
- *Simetría respecto a un eje e* es el movimiento que asocia a cada punto P otro punto P', tales que PP' es perpendicular a e, y las distancias de P y P' al eje e son iguales.
- Las *semejanzas* transforman una figura en otra con igual forma pero distinto tamaño.
- La *escala* es la razón de semejanza entre el original y su representación. Puede ser numérica o gráfica.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Determinar los elementos de un vector.	• Ejes de coordenadas. • Vector: componentes, módulo, dirección y sentido.	• Obtención de las componentes y el módulo de un vector.
2. Reconocer los distintos movimientos.	• Movimientos: traslación, giros, simetría respecto a un punto y simetría respecto a un eje.	• Cálculo de la figura transformada de otra mediante una traslación de vector $\vec{v}$. • Obtención de la figura transformada de otra mediante un giro de centro O y ángulo α. • Determinación de la figura transformada de otra por una simetría central de centro O. • Obtención de la figura transformada de una dada por una simetría de eje e.
3. Distinguir semejanzas y homotecias.	• Semejanzas. Polígonos semejantes.	• Distinción de si dos figuras son semejantes.
4. Operar con escalas.	• Escalas gráficas y numéricas.	• Trabajo con escalas numéricas y gráficas en planos y mapas.

OBJETIVO 1

DETERMINAR LOS ELEMENTOS DE UN VECTOR

NOMBRE: ______________________________ CURSO: ______________ FECHA: ______________

EJES DE COORDENADAS

Los ejes de coordenadas están formados por dos rectas: una horizontal y otra vertical.

- La recta horizontal es el **eje de abscisas o eje *X***.
- La recta vertical es el **eje de ordenadas o eje *Y***.
- El punto donde se cortan los ejes se llama **origen de coordenadas**.

PUNTOS

Los puntos en el plano vienen representados por dos coordenadas: la primera indica su situación en el eje X, y la segunda, su posición en el eje Y: $A(x, y)$.

VECTORES Y SUS COMPONENTES

Dos puntos A y B determinan un vector fijo $\overrightarrow{AB}$.

A: origen del vector.

B: extremo del vector.

Componentes del vector $\overrightarrow{AB}$: se obtienen hallando la diferencia entre las coordenadas del extremo B y del origen A: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Módulo del vector $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}|$ es la longitud del segmento AB.

El módulo de un vector $\overrightarrow{AB}(x, y)$ es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección del vector $\overrightarrow{AB}$: es la dirección de la recta AB.

Sentido del vector $\overrightarrow{AB}$: es el que va del origen (A) al extremo (B).

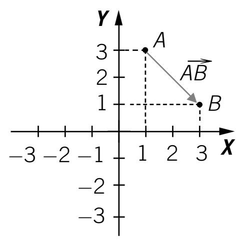
EJEMPLO

Considera los puntos $A(1, 3)$ y $B(3, 1)$.

Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $(3 - 1, 1 - 3) = (2, -2)$.

La primera coordenada (2) representa el desplazamiento en el eje X.

La segunda coordenada (-2) representa el desplazamiento en el eje Y.



1 **Dados los puntos de coordenadas $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(0, 6)$ y $D(-3, 7)$:**

a) Halla las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

b) ¿Qué módulo tienen los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$?

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

MOVIMIENTOS

Son las transformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.

TRASLACIÓN

Una traslación es un desplazamiento ordenado mediante un vector.
El trasladado A' de un punto $A(x, y)$ mediante un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ es: $A'(x + x_1, y + y_1)$.

EJEMPLO

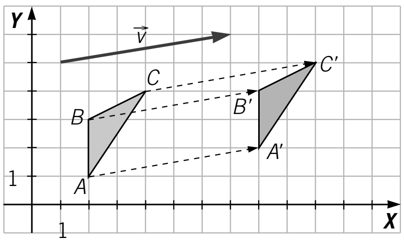
Dados los puntos $A(2, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(4, 4)$, trasládalos según el vector $\vec{v}(6, 1)$.

Trasladamos $A(2, 1)$: $A' = A + \vec{v} = (2, 1) + (6, 1) = (8, 2)$

Trasladamos $B(2, 3)$: $B' = B + \vec{v} = (2, 3) + (6, 1) = (8, 4)$

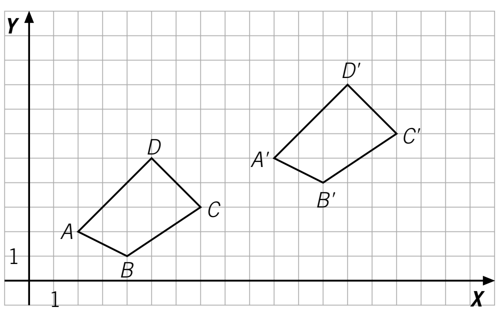
Trasladamos $C(4, 4)$: $C' = C + \vec{v} = (4, 4) + (6, 1) = (10, 5)$

A', B' y C' son la traslación de los puntos A, B y C mediante el vector $\vec{v}(6, 1)$.
Si dibujamos A, B, C, A', B', C', podemos observar lo que ha ocurrido:



1 **Un cuadrado tiene como vértices los puntos $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, -1)$ y $D(-1, -1)$. Halla su trasladado por el vector $\vec{v}(4, -2)$.**

2 **El cuadrilátero *ABCD* se ha trasladado y se ha obtenido *A'B'C'D'*.**



a) ¿Qué coordenadas tienen los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$?

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector traslación que transforma *ABCD* en *A'B'C'D'*?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

GIRO

- Un **giro** es un movimiento angular de α grados, con respecto a un punto determinado denominado centro de giro.
- Los giros no tienen una expresión sencilla en el plano cartesiano como ocurre con las traslaciones. Solo en ciertos casos ocurre así:
  – Giro de centro (0, 0) y ángulo 90°: transforma $P(x, y)$ en $P'(-y, x)$
  – Giro de centro (0, 0) y ángulo 180°: transforma $P(x, y)$ en $P'(-x, -y)$
  – Giro de centro (0, 0) y ángulo 270°: transforma $P(x, y)$ en $P'(y, -x)$

EJEMPLO

Gira el punto $A(5, -4)$ respecto al punto (0, 0) un ángulo de 90°, 180° y 270°.

Giro de 90º: $A(5, -4) \rightarrow A'(4, 5)$
Giro de 180º: $A(5, -4) \rightarrow A'(-5, 4)$
Giro de 270º: $A(5, -4) \rightarrow A'(-4, -5)$

3 **Un triángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(3, 5)$.**

a) Determina el transformado de *ABC*, *A'B'C'*, por un giro de centro el origen y ángulo 90°.
b) Halla el transformado de *A'B'C'* por un giro de centro el origen y ángulo 90°.
c) Obtén el transformado de *ABC* por un giro de centro el origen y ángulo 180°.

4 **La estrella de puntas *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* se ha girado con centro en el punto *O*. Completa la tabla, indicando el ángulo de giro.**

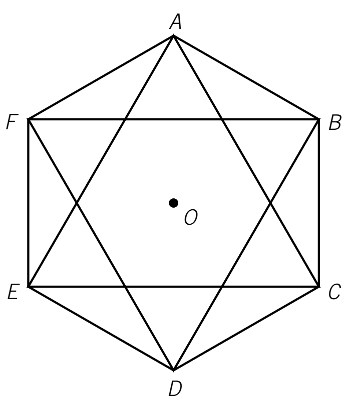
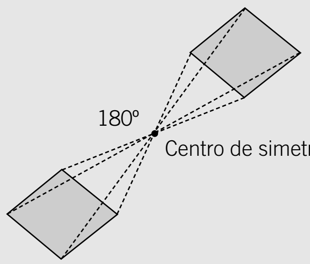


FIGURA ORIGINAL	FIGURA FINAL	ÁNGULO DE GIRO
ABCDEF	*EFABCD*	
	FABCDE	
	CDEFAB	
	DEFABC	
	BCDEFA	

SIMETRÍA RESPECTO A UN PUNTO

La **simetría respecto a un punto** es un giro de 180º con respecto a ese punto, llamado centro de simetría.



5 **De las siguientes letras mayúsculas, di cuáles tienen centro de simetría e indícalo.**

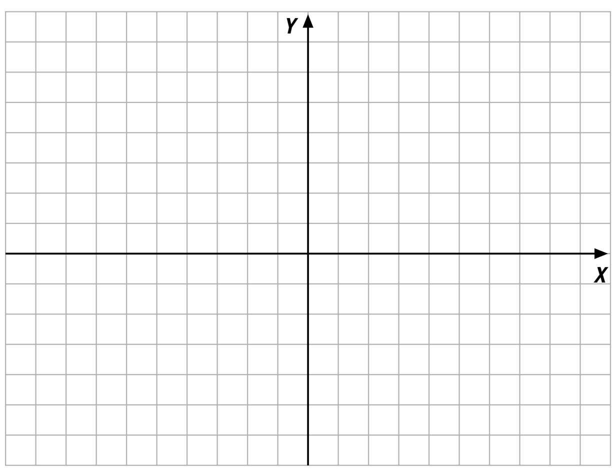
M N O P S T

6 **Un triángulo tiene por vértices los puntos *A*(2, 3), *B*(−3, 5) y *C*(6, 7).**

a) Determina el transformado de *ABC*, *A′B′C′*, por una simetría central con centro el origen.

b) Halla su transformado por una simetría con centro el punto *A*.

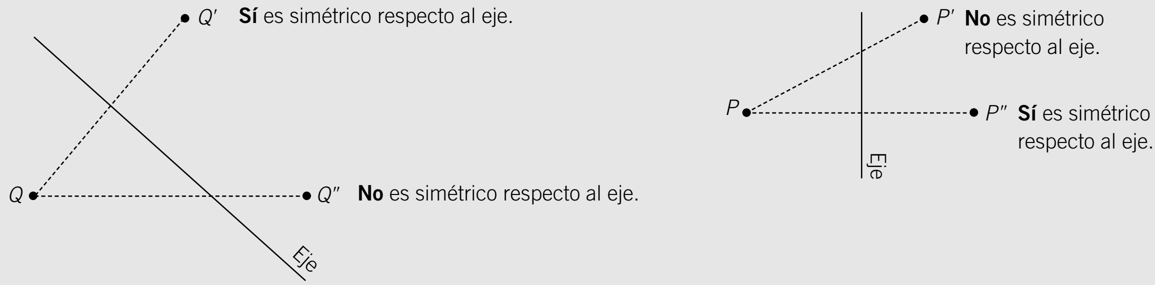
7 **Al triángulo de vértices *A*(2, 3), *B*(5, 1) y *C*(4, 6) se le aplica una simetría central, con centro el origen, y se convierte en el triángulo *A′B′C′*. Dibuja los triángulos *ABC* y *A′B′C′*.**



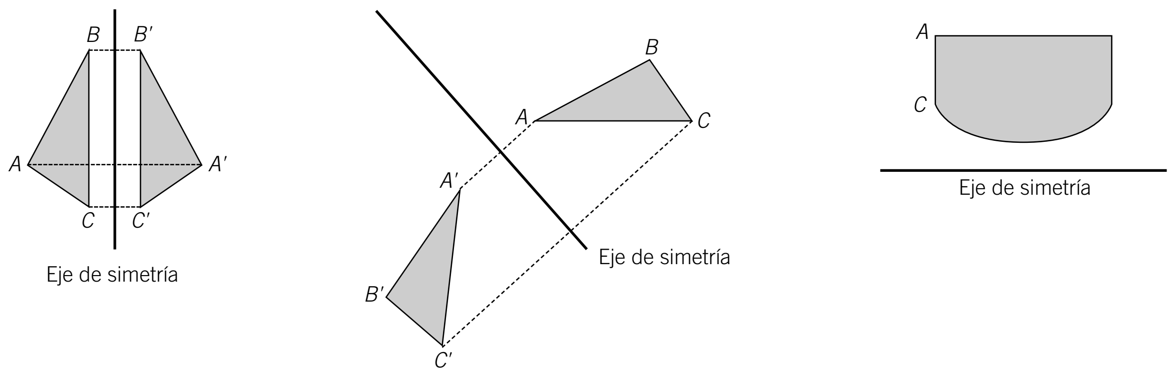
Escribe las coordenadas de los puntos *A′*, *B′* y *C′*.

SIMETRÍA RESPECTO A UN EJE

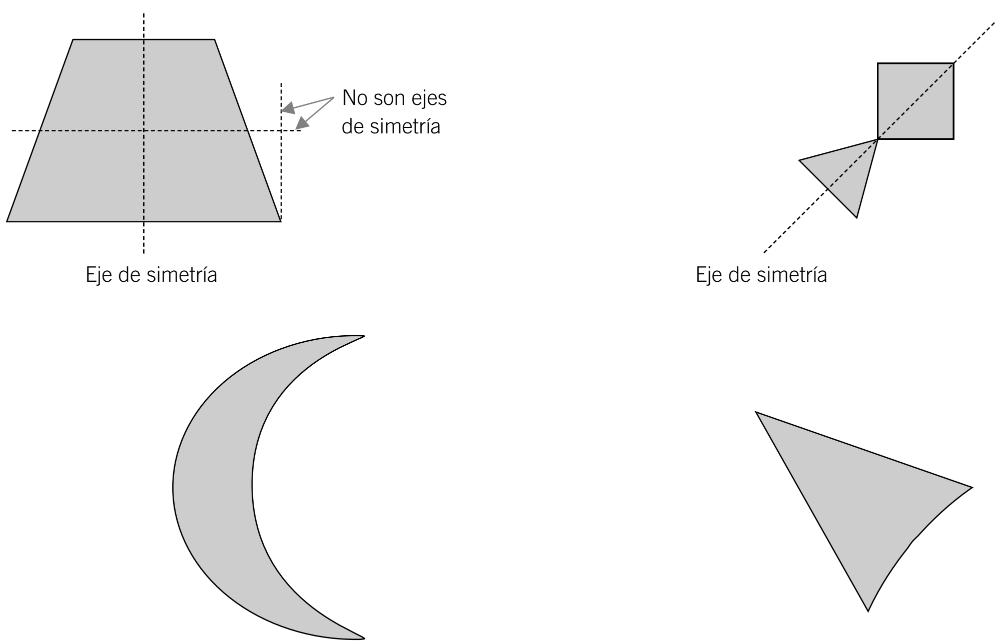
Un punto es simétrico de otro respecto a un eje cuando está a la misma distancia del eje y se sitúa sobre la misma perpendicular al eje.



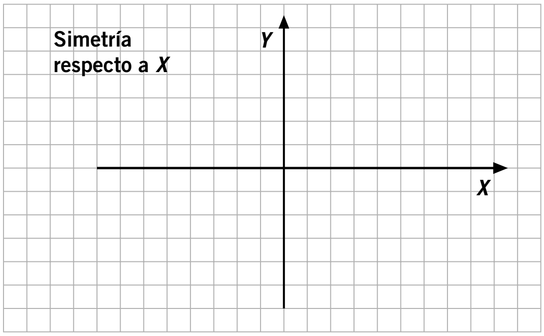
8 **Observa los dos primeros ejemplos y dibuja la figura simétrica en el tercer caso.**

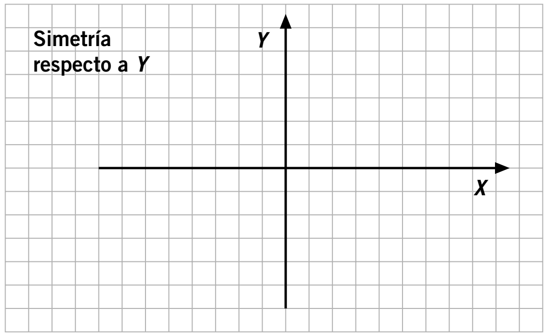


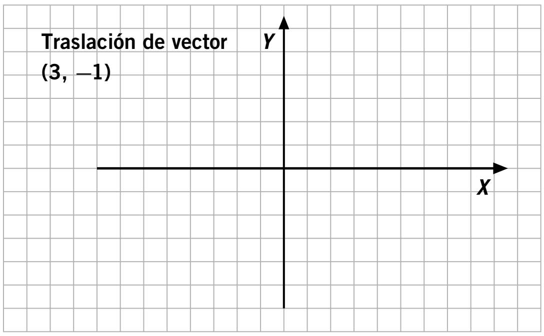
9 **Obtén los ejes de simetría de las siguientes figuras.**

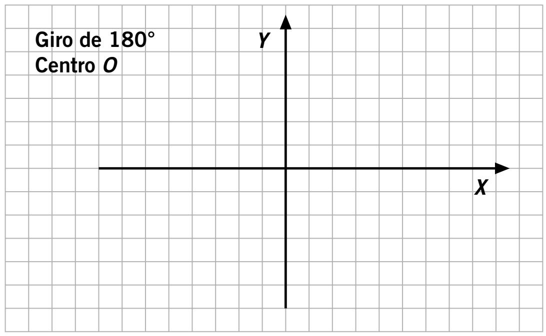


10 **Representa, en cada sistema de coordenadas, el triángulo de vértices *A*(−2, 1), *B*(2, 5) y *C*(3, −2). Aplícale el movimiento que se indica en cada caso y dibuja el triángulo resultante.**

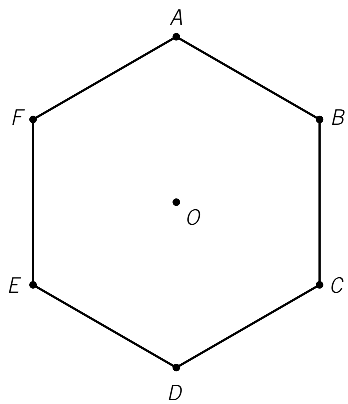
a)


c)


b)


d)


11 **El hexágono *ABCDEF* gira 240° con centro en *O*. Escribe junto a cada vértice la nueva letra que le corresponde tras realizarse el giro.**



12 **¿Cuáles son las coordenadas del triángulo obtenido al aplicar al triángulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (4, 0)$ una traslación de vector (5, −3)?**

$A = (0, 0) \rightarrow A' = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

$B = (0, 4) \rightarrow B' = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

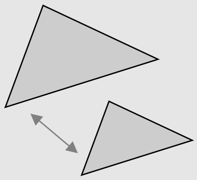
$C = (4, 0) \rightarrow C' = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

DISTINGUIR SEMEJANZAS Y HOMOTECIAS

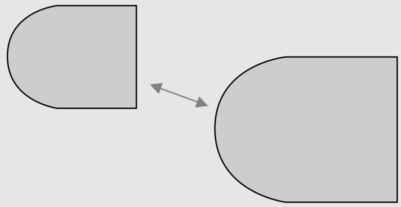
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **semejanzas** transforman una figura en otra figura con la misma forma pero, generalmente, con distinto tamaño.

Se diferencian de las traslaciones y los giros en que no son movimientos.



Son semejantes.



Son semejantes.

POLÍGONOS SEMEJANTES

Dos **polígonos** son **semejantes** si cada ángulo y su transformado son iguales, y el cociente entre cada lado y su homólogo es constante. Esa cantidad se llama **razón de semejanza**.

EJEMPLO

Halla la longitud de los lados que faltan en la figura 2, sabiendo que es semejante a la figura 1.

FIGURA 1

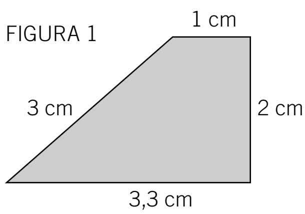
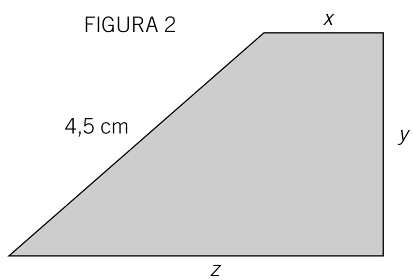


FIGURA 2



Como las figuras 1 y 2 son semejantes, existe una relación de proporcionalidad entre las longitudes de sus lados, es decir, son directamente proporcionales:

FIGURA 1	3 cm	1 cm	2 cm	3,3 cm
FIGURA 2	4,5 cm	x	y	z

$$\frac{3}{4,5} = \frac{1}{x} \qquad 3x = 4,5 \qquad x = \frac{4,5}{3} = 1,5 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{4,5} = \frac{2}{y} \qquad 3y = 9 \qquad y = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{4,5} = \frac{3,3}{z} \qquad 3z = 14,85 \qquad z = \frac{14,85}{3} = 4,95 \text{ cm}$$

1 **Calcula las longitudes de los lados que faltan en estas figuras, sabiendo que son semejantes.**

FIGURA 1

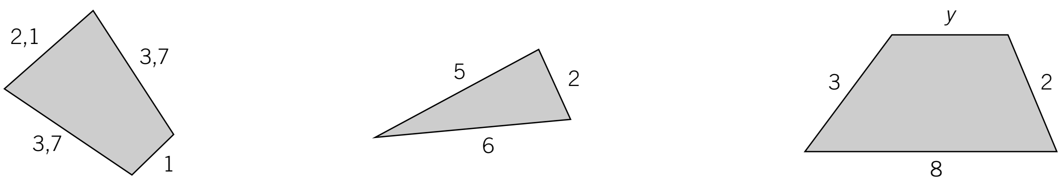


FIGURA 2

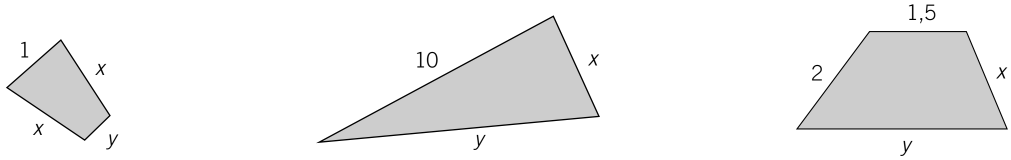


FIGURA 1	2,1	3,7	1	FIGURA 1		FIGURA 1
FIGURA 2	1	x	y	FIGURA 2		FIGURA 2

—— = —— —— = ——

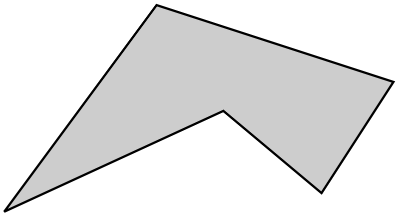
$x =$ $y =$

2 **¿Es el polígono de lados 4 cm, 7 cm y 5 cm semejante al polígono de lados 60 cm, 105 cm y 75 cm?**

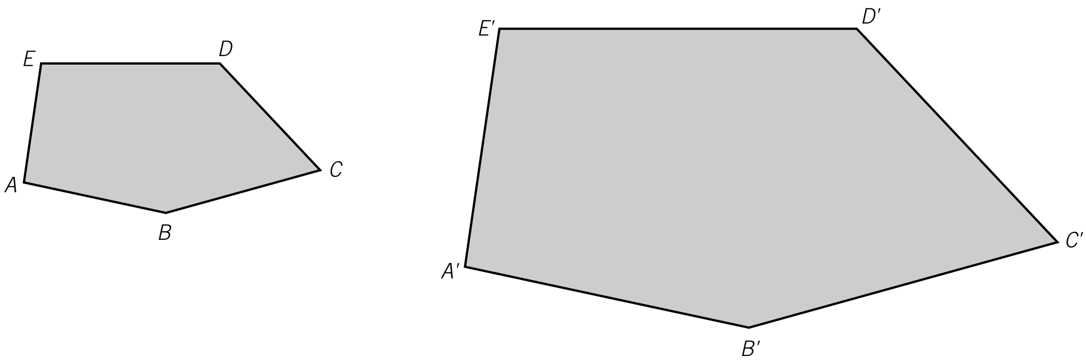
3 **Los lados de un triángulo miden 6 cm, 9 cm y 13 cm y los de otro triángulo miden 12 cm, 18 cm y 26 cm. ¿Son semejantes?**

4 **Un triángulo tiene por lados $a = 3$ cm y $b = 8$ cm. Otro semejante a él tiene como lados $b' = 40$ cm y $c' = 50$ cm. Halla la longitud de los lados de los dos triángulos.**

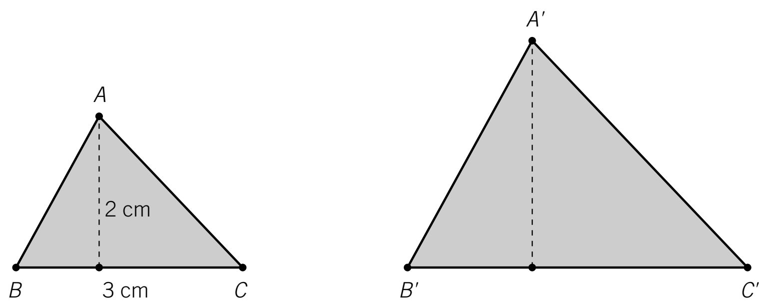
5 **Dibuja un polígono semejante al de la figura, sabiendo que la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.**



6 **Los polígonos *ABCDE* y *A′B′C′D′E′* son semejantes. Ayúdate de una regla y halla la razón de semejanza entre ambos.**



7 **Los siguientes triángulos son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{3}{2}$.**
Halla la base y la altura de *A′B′C′*. Halla el área de *ABC* y el área de *A′B′C′*.
¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre las áreas?



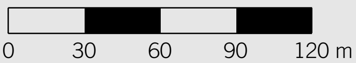
OPERAR CON ESCALAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

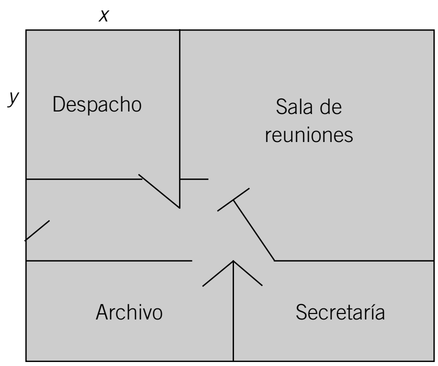
- La **escala** es la razón de semejanza entre el objeto real y su representación.
- Las escalas se utilizan en planos, mapas, maquetas, etc.
- La escala puede ser numérica o gráfica:

  Escala numérica: 1:3.000 → 1 cm en el plano son 3.000 cm en la realidad.

  Escala gráfica:



1 **Observa el siguiente dibujo a escala 1:200 y obtén la medida del despacho.**



Escala 1:200

Medida tomada en el plano: 1 cm en el plano → Medida real: 200 cm reales

Para saber cuánto mide el despacho en la realidad tomamos una regla y medimos *x* e *y*:

Mapa	1	$\square$	$\square$
Realidad	200	*a*	*b*

$$\frac{1}{200} = \frac{}{a} \qquad \frac{1}{200} = \frac{}{b}$$

$\boxed{a =\quad}$ $\boxed{b =\quad}$

2 **Dos ciudades *A* y *B* están separadas entre sí por 60 km. ¿A qué distancia se encuentran en un mapa a escala 1:400.000?**

3 **Si en un mapa a escala 1:90.000 vemos que dos lugares *A* y *B* están separados por 2 cm, ¿qué distancia les separa en la realidad?**

4 **Algunas fotocopiadoras reducen o amplían los originales. Estas reducciones o ampliaciones vienen expresadas en la máquina con porcentajes. Una reducción del 90 % indica que 100 cm del original se convierten en 90 cm en la fotocopia, y que 1 cm del original se convierte en 0,9 cm en la fotocopia.**

Se ha fotocopiado con reducción al 80% un plano hecho a escala 1:600. ¿Cuál es la escala de la fotocopia?

1 cm del plano se convierte en 0,8 cm de la fotocopia.

0,8 cm de la fotocopia representan 600 cm de la realidad.

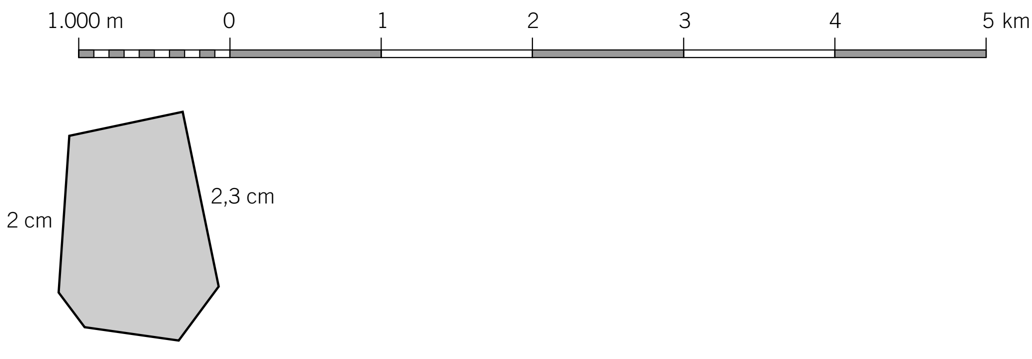
$$\left.\begin{array}{r} 0{,}8 \rightarrow 600 \\ 1 \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{600}{0{,}8} = 750. \text{ La escala es 1:750.}$$

a) ¿Cuál es la escala de la fotocopia si se hace al 75 %?

b) ¿Cuál es la escala de la fotocopia si se hace al 120 %?

c) ¿Y la escala de la fotocopia si se hace al 125 %?

5 **El siguiente dibujo muestra la forma y el tamaño que tiene un parque en el plano de una ciudad. También se ha dibujado la escala que aparece en dicho plano. Halla las medidas de los dos lados indicados en el dibujo.**



11 Funciones

INTRODUCCIÓN

El concepto de función es uno de los más importantes que se tratan en este curso y, aunque no reviste una especial dificultad, plantea a veces problemas a los alumnos.

Por ello, la unidad comienza explicando cómo determinar si una relación entre magnitudes es función o no, así como las distintas formas de expresar una función: mediante texto, tabla, fórmula y gráfica, dedicando atención al análisis de estas últimas. Es importante trabajar las distintas expresiones de una función, señalando que todas son equivalentes y expresan lo mismo. Una vez determinado que la relación entre dos magnitudes es una función, el siguiente paso es diferenciar entre variable independiente y dependiente.

El análisis de las características de las funciones centrará el resto de la unidad. Se estudiarán el dominio y el recorrido de la función, su continuidad o discontinuidad, intervalos donde la función crece o decrece y la determinación de los valores donde alcanza un máximo o un mínimo.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *magnitud* es una característica que puede ser medida y expresada con un número.
- Una *función* es una correspondencia entre variables que asocia a cada valor de una de ellas un único valor de la otra.
- Una *variable independiente* es la que puede tomar cualquier valor. La *variable dependiente* depende del valor que tome la variable independiente.
- *Dominio*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- *Recorrido*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- *Gráfica de una función*: representación del conjunto de puntos del plano que la definen.
- *Función periódica*: su gráfica se repite cada cierto intervalo; $f(x) = f(x + T)$, siendo T el período.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir relaciones funcionales entre magnitudes.	• Variables. • Relación funcional.	• Determinación de la relación entre dos variables, señalando si es o no funcional.
2. Conocer las diferentes expresiones de una función.	• Expresión de una función mediante texto, tabla, gráfica o expresión algebraica.	• Expresión de una función. • Obtención de unas expresiones a partir de otras.
3. Calcular el dominio y el recorrido de una función.	• Variable independiente y variable dependiente. • Dominio y recorrido de una función.	• Obtención del recorrido y el dominio de una función.
4. Distinguir entre funciones discontinuas y continuas.	• Función continua. • Función discontinua.	• Diferenciación de funciones continuas y discontinuas. • Resolución de problemas: ecuación, variables y representación gráfica.
5. Estudiar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una gráfica.	• Función creciente y función decreciente. • Máximos y mínimos.	• Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. • Determinación de los máximos y mínimos.
6. Reconocer las funciones periódicas.	• Función periódica.	• Reconocimiento de funciones periódicas y su período.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 1

DISTINGUIR RELACIONES FUNCIONALES ENTRE MAGNITUDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Magnitud** es cualquier característica que puede ser medida y su valor expresado mediante un número.
- Una **relación entre dos magnitudes** es una forma de asociar una serie de valores de una de ellas con una serie de valores de la otra. Por ejemplo:
  – El consumo de gasolina de un coche asociado a la distancia recorrida.
  – El precio del menú de un restaurante depende de los platos elegidos.
  – El precio de las entradas de cine está relacionado con el número de amigos que vamos.
- En una relación entre magnitudes, los valores de estas cambian, y por eso las magnitudes se llaman **variables**.

1 **¿Qué características son magnitudes? Marca con una cruz.**

a) El número de páginas de un libro.
b) El color de la tapa de un cuaderno.
c) El precio de un disco compacto.
d) La altura de un edificio.

2 **De las parejas de magnitudes, ¿cuáles están relacionadas? Marca con una cruz.**

a) La altura de los alumnos de clase y su nota en Matemáticas.
b) El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento.
c) El número de entradas de cine y su importe.
d) La velocidad de un coche y el tiempo utilizado en un trayecto.

- Si en una relación entre dos magnitudes, cada valor de una de ellas está asociado a un único valor de la otra, se dice que esa correspondencia o relación es una **función**.
  – Las magnitudes *número de kilos de naranjas* y *coste* representan una función. A un cierto número de kilos solo le corresponde un precio.
  – El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento no representan una función. A un cierto coeficiente le pueden corresponder varios lugares de nacimiento.
- La **variable independiente (*x*)** puede tomar cualquier valor, y el valor de la **variable dependiente (*y*)** depende del que tome la variable independiente.

3 **De los siguientes pares de magnitudes, señala cuáles representan una función. Identifica su variable dependiente e independiente.**

a) El volumen de un cubo y su arista.
b) La edad de una persona y su color de ojos.
c) El importe del recibo de la luz y la cantidad de electricidad que se gasta.
d) La edad de una persona y su talla de camisa.
e) El número de diagonales y el número de lados de un polígono.
f) La edad de un padre y la edad de su hijo.

CONOCER LAS DIFERENTES EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante una tabla:** los valores de las variables independiente y dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante un gráfico:** nos da una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente.

EJEMPLO

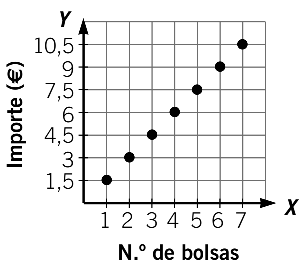
Un grupo de amigos va al cine y compran bolsas de palomitas. Una bolsa vale 1,50 €, dos bolsas valen 3 € y cinco bolsas valdrán 7,50 €.

Vamos a expresar este ejemplo de las cuatro maneras que acabamos de ver:

- **Mediante un texto:** el importe que hay que pagar en euros es el producto de 1,50 por el número de bolsas de palomitas compradas.
- **Mediante una tabla:** el número de bolsas es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.

N.º DE BOLSAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

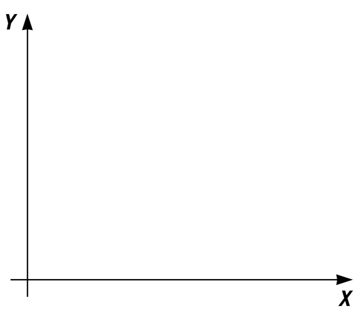
- **Mediante un gráfico:** hemos elegido un gráfico de puntos en un sistema de ejes de coordenadas.



- **Mediante una fórmula:** si llamamos y al importe en euros y x al número de bolsas de palomitas, la fórmula será: $y = 1,5 \cdot x$.

1 **Una compañía telefónica cobra en su recibo una cuota fija de 0,13 € en cada llamada y 0,15 € por cada minuto. Obtén la tabla, la gráfica y la fórmula que expresa la relación entre el importe del recibo de teléfono y el número de minutos.**

N.º DE MINUTOS (x)				
IMPORTE DEL RECIBO (y)				

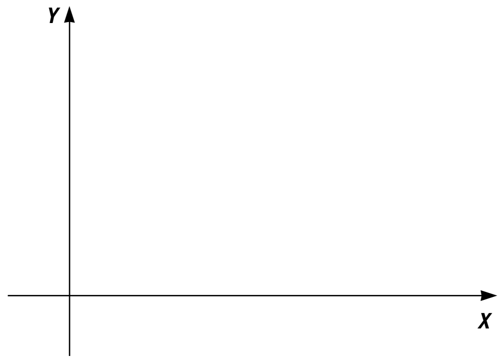


ADAPTACIÓN CURRICULAR

La **gráfica de una función** es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

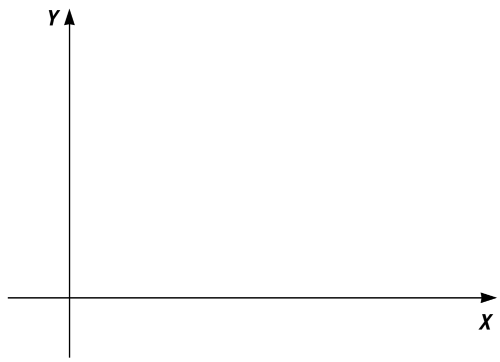
2 **La siguiente tabla expresa la relación entre el lado de un cuadrado y su área. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.**

LADO	ÁREA
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100



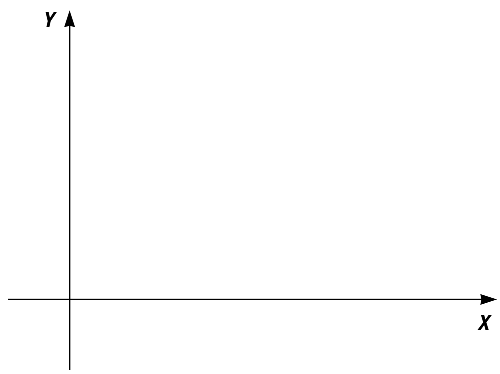
3 **Dada la función mediante la fórmula: $y = x^2 + 1$, obtén la tabla y la gráfica.**

x	$y = f(x)$
-3	$(-3)^2 + 1 = 10$
-2	
1	
0	
1	
2	
3	



4 **Dada la función mediante la fórmula: $y = x^2 - 2$, obtén la tabla y la gráfica.**

x	$y = f(x)$



5 **Expresa, mediante una fórmula, la relación que existe entre las siguientes magnitudes.**

a) El radio de una circunferencia y su longitud.
b) El lado de un cuadrado y su área.
c) El radio de una esfera y su volumen.

CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una relación entre dos magnitudes es una **función** si a cada valor de la variable independiente se le asocia un único valor de la variable dependiente: $\boldsymbol{f(x) = y}$.
- El valor de la **variable independiente** se suele representar por $\boldsymbol{x}$, y también se llama **original**.
- El valor de la **variable dependiente** se suele representar por $\boldsymbol{y}$, y también se llama **imagen**.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x.
- El **recorrido** de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable y.

EJEMPLO

Dada la función $f(x) = 2x + 3$, calcula las imágenes para $x = 0$ y $x = -1$.

$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ $\qquad$ $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$

Halla el dominio y el recorrido de la función: $f(x) = 3x - 7$.

El dominio y el recorrido de la función son el conjunto de los números reales, ya que la variable x puede tomar como valor cualquier número real, y para cada uno de esos números reales, la variable y tiene como valor también un número real.

1 **Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más 5 unidades:**

a) Halla su fórmula o expresión algebraica.

b) Calcula $f(2)$ y $f(0)$.

c) ¿Es posible encontrar la imagen de $\frac{2}{3}$?

d) Determina el dominio.

2 **Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la suma de ese número más 5:**

a) ¿Es una función? Si lo es, determina cuál es su fórmula.

b) ¿Se puede calcular $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ y $f(-5)$?

c) Determina su dominio y recorrido.

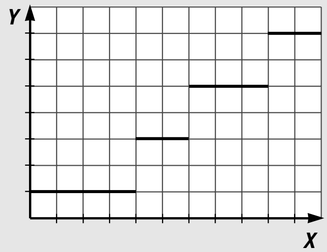
OBJETIVO 4

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES DISCONTINUAS Y CONTINUAS

NOMBRE: ______ CURSO: ______ FECHA: ______

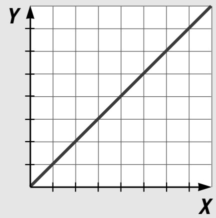
FUNCIÓN DISCONTINUA

Una función es discontinua si no se puede dibujar de un solo trazo, y los puntos donde necesitamos levantar el lápiz del papel se denominan puntos de discontinuidad.



FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, no presenta puntos de discontinuidad.



1 **Estudia la relación que existe entre la edad de Juan y la paga semanal que le dan sus padres, teniendo en cuenta estos datos. Desde que nació hasta los 10 años no recibió paga semanal, desde los 10 años hasta los 12 recibió 5 € semanales, desde los 12 años hasta los 15 recibió 8 €, desde los 15 años hasta los 20 recibió 10 €, y a partir de los 20 años dejó de recibir paga semanal. Obtén la tabla que relaciona ambas magnitudes y la gráfica. ¿Cómo es la función que has obtenido, continua o discontinua?**

2 **Un vendedor de muebles tiene un sueldo base de 650 € y por cada mueble que vende cobra una comisión de 100 €.**

a) Representa la gráfica que expresa el sueldo en función del número de muebles vendidos.

b) ¿Es la función continua o discontinua?

3 **Dada la función que asocia a cada número real su cuádruple más 2 unidades:**

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Es continua o discontinua?

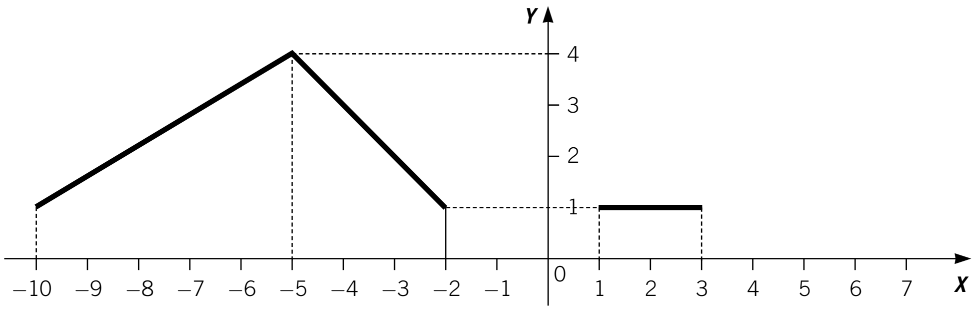
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dada una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_2) - f(x_1) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $f(x_2) - f(x_1) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.

EJEMPLO

Dada la siguiente función, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Siempre se empieza estudiando el eje X, de izquierda a derecha.

- En el intervalo $[-10, -5]$, la función crece y su tasa de crecimiento es:

$$\left.\begin{matrix} f(-10) = 1 \\ f(-5) = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow f(-10) - f(-5) = 4 - 1 = 3$$

- En el intervalo $[-5, -2]$, la función decrece y su tasa de decrecimiento es:

$$\left.\begin{matrix} f(-5) = 4 \\ f(-2) = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow f(-5) - f(-2) = 4 - 1 = 3$$

- Hay una discontinuidad desde $x = -2$ a $x = 1$.
- En el intervalo $[1, 3]$, la función no crece ni decrece, se mantiene constante.

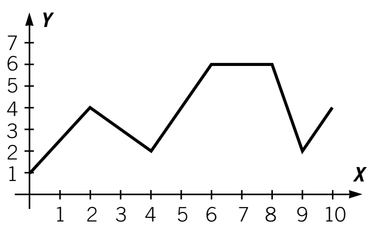
1 **Representa una función con las siguientes características.**

a) Es creciente en los intervalos $[2, 5]$ y $[7, 9]$.

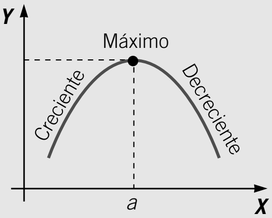
b) Es decreciente en $[5, 7]$.

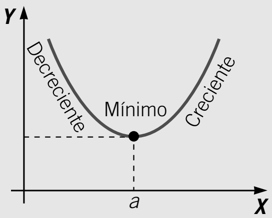
c) Es constante en $[0, 2]$.

2 **Dada la función representada por la gráfica siguiente, estudia su continuidad y crecimiento.**



- Una función tiene un **máximo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, la función es creciente, y a la derecha es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, es decreciente, y a la derecha, creciente.





3 **Dada la función $y = x^2 - 4$, haz una tabla de valores, represéntala y estudia si es continua, dónde es creciente y decreciente y si tiene máximos y mínimos.**

4 **La siguiente tabla muestra la cantidad de medicamento en sangre que tiene una persona después de tomar un jarabe.**

TIEMPO (horas)	1	2	3	4	5	6	7
CANTIDAD (mg/dl)	90	75	60	45	30	15	0

a) Haz una gráfica a partir de la tabla.
b) La función representada, ¿es continua?
c) ¿Es creciente o decreciente?
d) ¿Tiene máximo o mínimo?

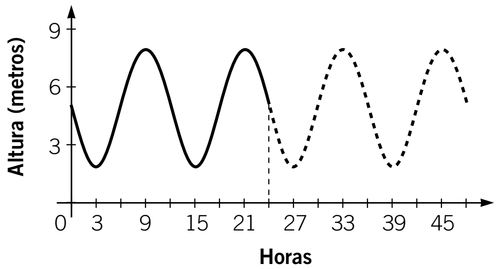
RECONOCER LAS FUNCIONES PERIÓDICAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

En una **función periódica**, su gráfica se repite cada cierto intervalo, que se denomina período, es decir, $f(x) = f(x + T)$, siendo T el valor del período.

EJEMPLO

Analiza cómo varía la profundidad del agua en una playa a lo largo del tiempo.



Esta función es periódica porque si tomamos la gráfica en el intervalo [3, 15], vemos que se repite exactamente igual en el intervalo [15, 27] y sigue repitiéndose en [27, 39], y así de forma sucesiva.

Se llama período a la longitud del intervalo que se repite:

$$\left.\begin{array}{l} [3, 15] \rightarrow \ \ 3 - 15 = 12 \\ [15, 27] \rightarrow 27 - 15 = 12 \\ [27, 39] \rightarrow 39 - 27 = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ En este caso, el período es 12.}$$

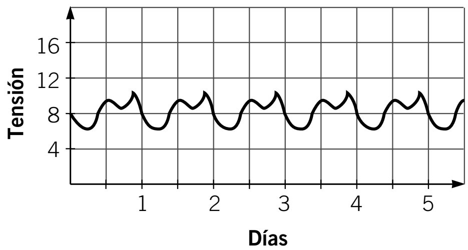
1 **Un tren sale de Alborada a las 12 horas y se dirige a Borán a velocidad constante, llegando en 40 minutos. Para durante 20 minutos y, después, sale de Borán con dirección a Alborada, llegando en 50 minutos. Vuelve a parar 10 minutos y a la hora en punto vuelve a salir hacia Borán.**

a) Representa gráficamente esta situación (coloca en el eje de abscisas el tiempo, y en el eje de ordenadas, la distancia del tren respecto a Alborada).

b) ¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su período?

2 **La cantidad de lluvia que cae en un lugar depende de su situación y de la época del año. Inventa los datos y dibuja una gráfica. ¿Es una función periódica? ¿Tiene máximos y mínimos?**

3 **La gráfica muestra cómo varía la tensión arterial mínima de una persona a lo largo de varios días.**

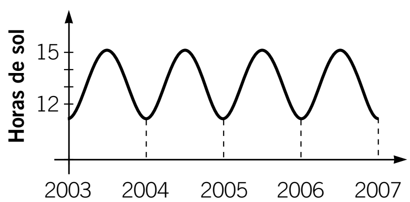


a) ¿Es una función periódica? Si lo es, indica el período.

b) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?

c) ¿Cuándo se da un máximo? ¿Y un mínimo?

4 **Observa el gráfico que muestra las horas de luz solar en un lugar en el mes de enero durante 5 años consecutivos.**



a) ¿Es una función periódica?

b) ¿Cuál es el período?

c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento?

12 Funciones de proporcionalidad

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica de funciones de proporcionalidad es una de las formas más directas de entender y verificar la relación entre variables. Estas gráficas se utilizan en el ámbito científico para interpretar y modelizar las leyes que rigen algunos fenómenos.

Conviene mostrar a los alumnos que, conociendo estas funciones y gráficas, se pueden describir fenómenos naturales y, en algunos casos, hasta predecirlos.

Es importante que los alumnos tengan clara la relación entre la expresión algebraica de una función de proporcionalidad y su representación gráfica, y que sean capaces de obtener una cualquiera de ellas a partir de la otra.

El cálculo de la ecuación de una recta presenta también cierta dificultad dependiendo de los datos, por lo que hay que insistir en su obtención, así como aprender a distinguir si dos rectas dadas son paralelas o secantes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función de proporcionalidad directa o función lineal*: $y = mx$. Su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas.
- *Función afín*: $y = mx + n$. Su gráfica es una recta de pendiente m. La *ordenada en el origen* es n.
- Si la pendiente de una recta es positiva: $m > 0$, la recta es creciente; si la pendiente de una recta es negativa: $m < 0$, la recta es decreciente.
- *Ecuación de una recta que pasa por dos puntos*: se calcula la pendiente de la recta; se sustituyen las coordenadas de uno de los puntos dados en la ecuación general de la recta, y se obtiene la ordenada en el origen; luego, con los valores de la pendiente y la ordenada, se escribe la ecuación de la recta.
- *Rectas paralelas*: tienen igual pendiente.
- *Rectas secantes*: tienen distinta pendiente. Se cortan en un punto que se obtiene gráfica o analíticamente.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer la función de proporcionalidad directa.	• Función lineal o de proporcionalidad directa. • Pendiente de una recta. • Representación gráfica.	• Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx$. • Resolución de problemas reales representados por funciones lineales.
2. Conocer la función afín.	• Función afín. • Pendiente de una recta. • Ordenada en el origen. • Representación gráfica.	• Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx + n$. • Comparación de rectas en función de su pendiente, dependiendo del crecimiento y decrecimiento.
3. Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Cálculo de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, conocidos su pendiente y la ordenada en el origen, o su pendiente y un punto por donde pasa.
4. Distinguir las rectas paralelas y las rectas secantes.	• Posición relativa de dos rectas respecto a sus pendientes. • Punto de corte de dos rectas secantes.	• Determinación de si dos rectas son paralelas o secantes, de manera gráfica y analítica. • Cálculo del punto de corte.

OBJETIVO 1

CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una **función de proporcionalidad directa o función lineal** se expresa de la forma:

  $\boldsymbol{y = m \cdot x}$, siendo m un número cualquiera.

- La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**.
- La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas (X) viene representada por el número $\boldsymbol{m}$, que recibe el nombre de **pendiente**. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje X, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forma con la horizontal.
- Si entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es una función lineal.

EJEMPLO

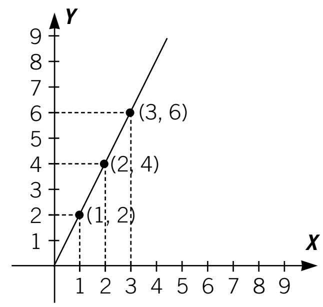
Observa la tabla y determina si la relación entre las magnitudes es de proporcionalidad directa.

BOLSAS DE PALOMITAS	1	2	3	4	5	6
IMPORTE (€)	2	4	6	8	10	12

- El número de bolsas de palomitas y el dinero que cuestan son magnitudes directamente proporcionales, ya que al comprar el doble de bolsas se duplicará el coste…
- La constante de proporcionalidad es: $m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots = 2$.
- La expresión algebraica de la función se puede expresar de la forma:

  $$y = m \cdot x \rightarrow y = 2 \cdot x$$

  donde x es el número de bolsas de palomitas e y es el importe en euros.
- La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene por pendiente $m = 2$.
  Para representarla hay que señalar en unos ejes de coordenadas los puntos (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)… y unirlos mediante una recta.



1 **Señala si estos pares de valores son magnitudes directa o inversamente proporcionales. ¿Cuáles se pueden representar mediante una función lineal?**

a) Un número y su opuesto.

b) Un número y su inverso.

c) Un número y su triple.

d) Un número y su mitad.

e) Un número y el doble de su inverso.

f) Un número y el triple del opuesto de su inverso.

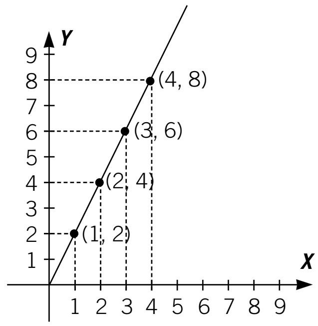
g) Un número y el doble del inverso del opuesto.

h) Un número y el inverso de su triple.

2 **Compara las funciones que representan la relación entre el número de fotocopias realizadas en varios establecimientos y su importe. Obtén la tabla de valores, la función lineal y la gráfica correspondiente.**

Establecimiento 1: cada fotocopia cuesta 2 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 2 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$3 \cdot 2 = 6$
4	$4 \cdot 2 = 8$
…	…

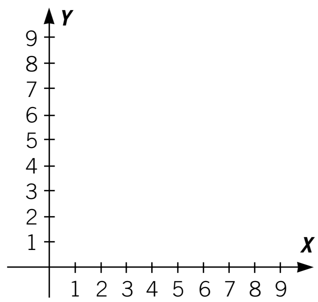


Constante de proporcionalidad $\rightarrow m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y = 2x$

Establecimiento 2: cada fotocopia cuesta 3 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 3 = 3$

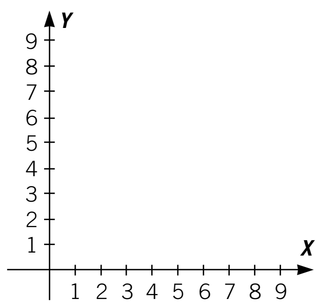


Constante de proporcionalidad $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y =$

Establecimiento 3: cada fotocopia cuesta 1,5 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$
2	$2 \cdot 1{,}5 = 3$



Constante de proporcionalidad $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 2

CONOCER LA FUNCIÓN AFÍN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una **función afín** se expresa de la forma:

  $\boldsymbol{y = m \cdot x + n}$, siendo m y n dos números cualesquiera.

  ***m*: pendiente de la recta.**

  Si $\boldsymbol{m > 0}$, la recta es **creciente**.

  Si $\boldsymbol{m < 0}$, la recta es **decreciente**.

  ***n*: ordenada en el origen.**

- La representación gráfica de estas funciones es una recta que no pasa por el origen de coordenadas, sino por el punto (0, *n*).
- Las funciones de proporcionalidad directa o **funciones lineales** son un caso particular de las funciones afines cuando $\boldsymbol{n = 0}$.

EJEMPLO

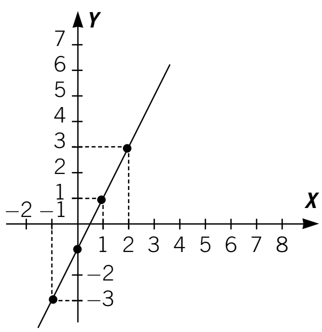
Dadas las funciones $y = 2x - 1$ e $y = -3x + 4$:

a) Determina su pendiente.
b) Halla la ordenada en el origen.
c) Represéntalas gráficamente.
d) ¿Cuál de ellas tiene mayor pendiente?
e) ¿Cómo son las rectas, crecientes o decrecientes?

Función 1

a) $m_1 = 2$
b) $n_1 = -1$
c)

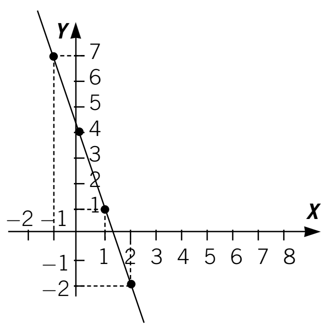
x	*y*
0	−1
1	1
2	3
−1	−3



Función 2

a) $m_2 = -3$
b) $n_2 = 4$
c)

x	*y*
0	4
1	1
2	−2
−1	7



d) $m_1 > m_2$

e) $m_1 > 0 \rightarrow$ Creciente $\qquad m_2 < 0 \rightarrow$ Decreciente

1 **Clasifica las funciones en lineales y afines, y escribe el valor de la pendiente y la ordenada en el origen.**

a) $y = -0{,}7x \rightarrow$ Función lineal
$m = -0{,}7 \quad n = 0$

b) $y = \dfrac{1}{2}x + 3$

c) $y = -\dfrac{1}{3}x$

d) $y = -3{,}5x - 3$

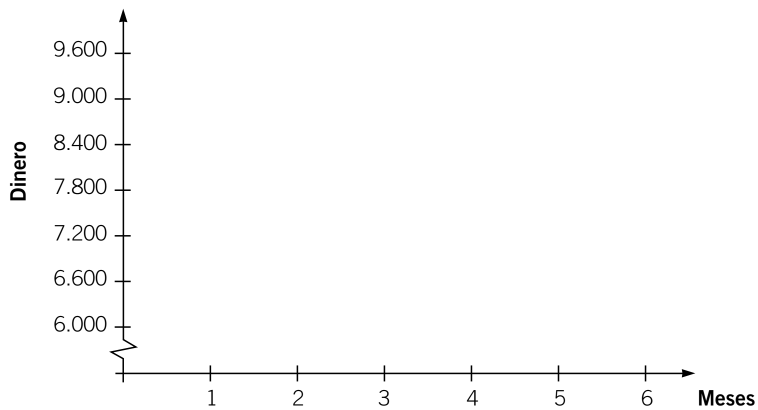
2 **Rosa ha pagado 6.000 € de entrada para comprar un piso y tiene que abonar 600 € mensuales.**

a) Haz una tabla que refleje lo que ha pagado al cabo de 1, 2, 3, …, 6 meses.

MESES	0	1	2	3	4	5	6
DINERO							

b) Escribe una función que exprese el dinero pagado en función del número de meses transcurridos.

c) Representa la gráfica de la función.



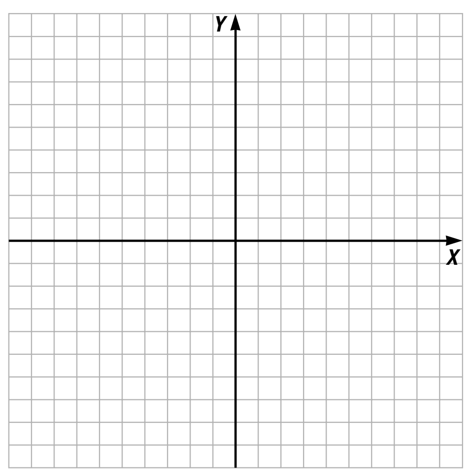
d) ¿Cuál es la pendiente?

e) ¿Y la ordenada en el origen?

3 **La pendiente de una función de la forma $y = mx + n$ es 3 y su ordenada en el origen es 2. Represéntala.**

a) Escribe la función.

b) Halla el valor de y para $x = -2{,}5$.



4 **Obtén la tabla de valores de estas funciones y represéntalas en los ejes de coordenadas.**

$y = 5x - 1$ $\qquad$ $y = 3x - 1$ $\qquad$ $y = x - 1$ $\qquad$ $y = -x - 1$ $\qquad$ $y = -3x - 1$

Función 1

x	$y = 5x - 1$
-3	$5 \cdot (-3) - 1 = -15 - 1 = -16$
-2	$5 \cdot (-2) - 1 = -10 - 1 = -11$
-1	$5 \cdot (-1) - 1 = -5 - 1 = -6$
0	$5 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$
1	$5 \cdot 1 - 1 = 5 - 1 = 4$
2	$5 \cdot 2 - 1 = 10 - 1 = 9$
3	$5 \cdot 3 - 1 = 15 - 1 = 14$

Función 2

x	$y = 3x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 3

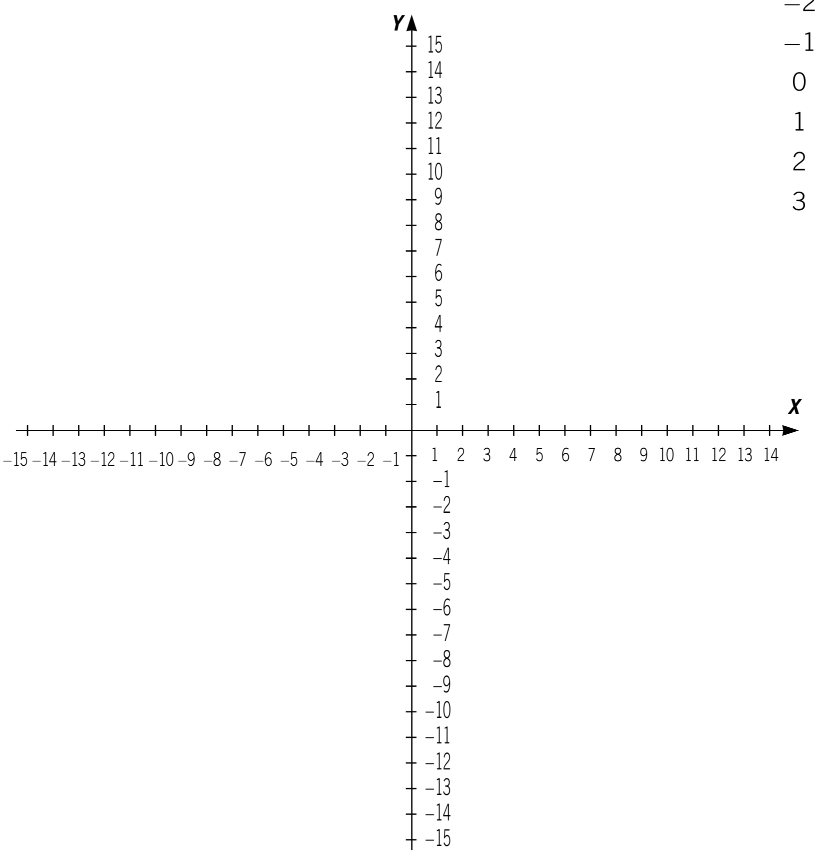
x	$y = x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 4

x	$y = -x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 5

x	$y = -3x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



De las funciones anteriores:

- **¿Cuáles son crecientes?**
- **¿Y cuáles son decrecientes?**
- **¿Hay alguna característica en la expresión de las funciones: $y = 5x - 1$, $y = 3x - 1$, $y = x - 1$, $y = -x - 1$, $y = -3x - 1$ que indique cuáles son crecientes y decrecientes?**

OBJETIVO 3

OBTENER LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Para representar una recta basta con conocer dos puntos por los que pasa.
- Para hallar la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por dos puntos, conocidas sus coordenadas, $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$, se procede así:

1.º **Calculamos el valor de la pendiente** $\rightarrow m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.º Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta, y **obtenemos el valor de la ordenada en el origen, *n***:

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$

o bien:

$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

3.º **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n), en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(3, 2) y *B*(4, 0).

1.º Calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{0 - 2}{4 - 3} = -2$$

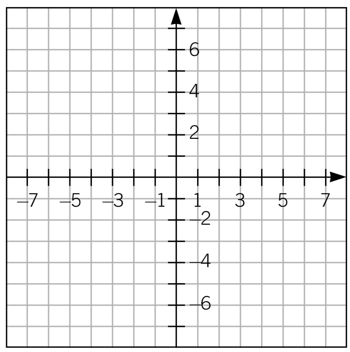
2.º Obtenemos el valor de la ordenada en el origen sustituyendo, por ejemplo, el punto A:

$$2 = -2 \cdot 3 + n \rightarrow n = 8$$

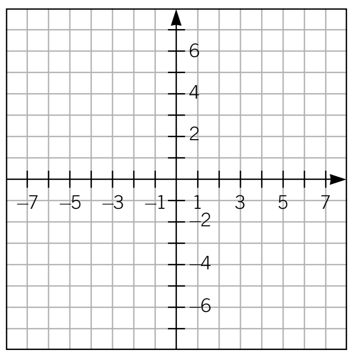
3.º Sustituimos los valores obtenidos:

$$y = mx + n \xrightarrow{m = -2,\ n = 8} y = -2x + 8$$

1 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(2, −1) y *B*(−3, −4) y represéntala.**



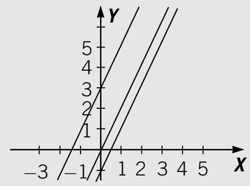
2 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(2, −1) y tiene de pendiente *m* = −2. Haz una tabla de valores y represéntala.**

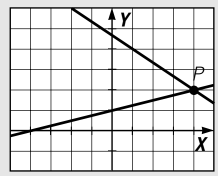


DISTINGUIR LAS RECTAS PARALELAS Y LAS RECTAS SECANTES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.**
- **Las rectas secantes no tienen la misma pendiente.**
- **Las rectas secantes se cortan en un punto.** Podemos calcular este punto de dos formas:
  - **Método gráfico:** dibujamos las rectas y observamos en qué punto se cortan.
  - **Método algebraico:** resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas.





EJEMPLO

Determina si las siguientes rectas son paralelas o secantes.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 3 \longrightarrow m = 2 \\ y = -x + 5 \longrightarrow m = -1 \end{array}\right\} \text{Sus pendientes son distintas} \rightarrow \text{Rectas secantes}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + 5 \longrightarrow m = 3 \\ y = 3x - 0{,}5 \rightarrow m = 3 \end{array}\right\} \text{Sus pendientes son iguales} \longrightarrow \text{Rectas paralelas}$$

1 **Une mediante flechas las rectas paralelas.**

$y = 5x - 2$
$y = 3x + 5$
$y = -3x + 5$
$y = -x + 2$

$y = -3x + 1$
$y = -x + 7$
$y = 3x - 2$
$y = 5x + 1$

EJEMPLO

Halla gráfica y algebraicamente el punto de corte de las rectas $y = x - 1$ e $y = -x + 3$.

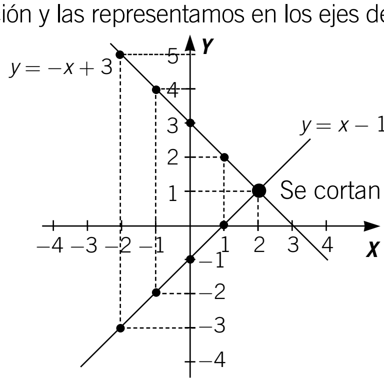
Método gráfico. Hallamos la tabla de valores de cada función y las representamos en los ejes de coordenadas.

$y = x - 1$

x	y
−2	−3
−1	−2
0	−1
1	0
2	1

$y = -x + 3$

x	y
−2	5
−1	4
0	3
1	2
2	1



Método algebraico. Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x - 1 = -x + 3 \\ \left.\begin{array}{l} x + x = 3 + 1 \rightarrow x = 2 \\ y = x - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Se cortan en el punto } (2, 1). \end{array}$$

2 **Calcula de forma gráfica y algebraica el punto de corte de las rectas $y = 2x - 1$ e $y = 3x + 1$.**

3 **Calcula de forma gráfica y algebraica el punto de corte de las rectas $y = -7x + 2$ e $y = 3x - 1$.**

4 **Representa las siguientes funciones. Escribe su pendiente y señala cuáles son paralelas o secantes.**

$y = -x + 1$ $y = 3x + 2$ $y = -x + 5$ $y = x + 1$

5 **Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 5x - 3$ y que pasa por el origen de coordenadas.**

6 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(5, 0)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = -3x - 6$.**

13 Estadística

INTRODUCCIÓN

La presencia de la Estadística es habitual en multitud de contextos de la vida real: encuestas electorales, sondeos de opinión, etc. La importancia de la Estadística en la sociedad actual se refleja en muchos campos: estudios médicos sobre enfermedades o medicamentos; análisis para establecer primas de seguros; distribución de las líneas de autobuses en una ciudad… Por ello, es importante que los alumnos se familiaricen con los conceptos que emplea esta disciplina.

Las medidas estadísticas sirven para analizar la información contenida en un conjunto de datos. Estas medidas se pueden dividir en dos grupos: las que corresponden a medidas de centralización y las que corresponden a medidas de dispersión.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Variable estadística cualitativa*: no se puede medir.
- *Variable estadística cuantitativa*: se puede medir, y su medida se expresa mediante números.
- *Media*: $\overline{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$
- *Mediana*: es un valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son iguales o inferiores a él y la otra mitad son iguales o superiores.
- *Moda*: es el valor de la variable o el intervalo con mayor frecuencia absoluta.
- *Desviación media*: es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
- *Varianza*: es la media de los cuadrados de las desviaciones de los valores respecto de la media.
- *Desviación típica*: es la raíz cuadrada de la varianza.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer y diferenciar entre población y muestra.	• Estadística. • Población y muestra.	• Distinción de los conceptos de población y muestra.
2. Clasificar las variables estadísticas.	• Variables cuantitativas y cualitativas. • Variables estadísticas discretas y continuas.	• Diferenciación entre variables cualitativas y cuantitativas, y dentro de estas, entre discretas y continuas.
3. Obtener la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.	• Tablas estadísticas. • Marca de clase.	• Construcción de tablas estadísticas adecuadas al conjunto de datos.
4. Calcular la frecuencia absoluta y relativa de un conjunto de datos.	• Frecuencias absolutas. • Frecuencias relativas.	• Cálculo de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.
5. Calcular las frecuencias acumuladas de un conjunto de datos.	• Frecuencias acumuladas.	• Cálculo de frecuencias acumuladas.
6. Utilizar e interpretar los gráficos estadísticos para representar datos.	• Gráficos estadísticos: diagrama de barras, histograma y polígono de frecuencias.	• Representación de las variables estadísticas mediante gráficos.
7. Distinguir y calcular las medidas de centralización de un conjunto de datos.	• Medidas de centralización: media, mediana y moda.	• Cálculo e interpretación de la media, la mediana y la moda de un conjunto de datos.
8. Distinguir y calcular las medidas de dispersión de un conjunto de datos.	• Medidas de dispersión: recorrido, desviación media, varianza y desviación típica.	• Cálculo e interpretación de las medidas de dispersión de un conjunto de datos.

OBJETIVO 1

RECONOCER Y DIFERENCIAR ENTRE POBLACIÓN Y MUESTRA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Estadística** es la ciencia encargada de recopilar y ordenar datos referidos a diversos fenómenos para su posterior análisis e interpretación.
- **Población** es el conjunto de elementos en los que se estudia un determinado aspecto o característica.
- **Muestra** es una parte de la población. Es importante escoger correctamente la muestra: debe ser representativa, es decir, dar una información similar a la obtenida si estudiásemos toda la población.

EJEMPLO

Considera tu clase como la población y completa el siguiente cuestionario.

Nombre: .... **Apellidos:** ....

Marca con una cruz la respuesta elegida y responde.

Sexo: ☐ Hombre ☐ Mujer

Deporte preferido:

☐ Fútbol ☐ Baloncesto ☐ Tenis ☐ Balonmano ☐ Otros

¿Cuántos hermanos tienes?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 o más hermanos

¿Cuántos años tienes?

☐ 13 años ☐ 14 años ☐ 15 años ☐ 16 años

¿Qué altura tienes?

¿Cuánto pesas?

Puede ocurrir que el día en que se reparta el cuestionario falte alguien en clase o que algún alumno no conteste y, aunque nuestro objetivo sea toda la **población**, es decir, el conjunto de los alumnos de clase, usaremos una parte de la población llamada **muestra**, que en nuestro caso estará formada por aquellos alumnos que hayan contestado al cuestionario.

1 **Señala en qué casos es más conveniente estudiar la población o una muestra.**

a) La longitud de los tornillos que fabrica una máquina de manera ininterrumpida.
b) La estatura de todos los visitantes extranjeros en un año en España.
c) El peso de un grupo de cinco amigos.
d) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
e) El número de hijos de las familias de una comunidad de vecinos.
f) La talla de camisa de los varones de una comunidad autónoma.
g) Los gustos musicales de los jóvenes de una ciudad.
h) La altura media de veinte alumnos de una clase.

CLASIFICAR LAS VARIABLES ESTADÍSTICAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- **Variable estadística** es toda característica o aspecto de los elementos de una población o muestra que se puede estudiar.
- Las variables estadísticas pueden ser **cuantitativas o cualitativas**.
- **Variables cuantitativas:** los valores que puede tomar son números. Pueden ser discretas o continuas.
  – **Variables cuantitativas discretas:** toman un número determinado de valores.
  – **Variables cuantitativas continuas:** pueden tomar cualquier valor comprendido entre dos dados.
- **Variables cualitativas:** no se pueden medir.

EJEMPLO

En el cuestionario del ejemplo anterior, diferencia las variables cuantitativas y cualitativas.

- Variables estadísticas cuantitativas: número de hermanos, edad, peso y altura.
  Estas variables las expresamos mediante números.
  – Variables estadísticas cuantitativas discretas: número de hermanos y edad.
  – Variables estadísticas cuantitativas continuas: peso y altura.
- Variables estadísticas cualitativas: sexo y deporte preferido.
  Estas variables no se expresan mediante números.

1 **Señala en cada caso lo que corresponda.**

VARIABLE	CUANTITATIVA		CUALITATIVA
	DISCRETA	CONTINUA	
Provincia de residencia			
Número de vecinos de un edificio			
Profesión de la madre			
Altura de un edificio			
Número de llamadas telefónicas diarias			
Número de primos			
Tipo de música preferida			
Barras de pan consumidas en una semana en un colegio			
Consumo de gasolina por cada 100 km			
Número de la puerta de tu casa			
Color de pelo			
Talla de pantalón			

OBJETIVO 3

OBTENER LA TABLA ESTADÍSTICA ASOCIADA A UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Las **tablas estadísticas** sirven para organizar los datos de una variable estadística y estudiarlos con mayor facilidad.
- **Si la variable es discreta**, es decir, tenemos un conjunto de datos pequeño, se forma una tabla con dos columnas. En una de las columnas se colocan los distintos valores de la variable, y en la otra columna, el número de veces que aparece cada uno de ellos.
- **Si la variable es continua**, se agrupan los valores en intervalos de igual amplitud, se establece la marca de clase, que es el punto medio de cada intervalo, y se hace el recuento de los datos de cada intervalo.

EJEMPLO

Daniel ha comprado 5 bolsas de palomitas, 7 caramelos, 2 chicles de menta y 10 piruletas. Organiza este conjunto de datos en una tabla.

Si queremos recoger la información en una tabla, ponemos en una columna los distintos valores de la variable: bolsas de palomitas, caramelos, chicles de menta y piruletas, y en la otra, el número de veces que aparece cada uno de ellos.

ARTÍCULOS	RECUENTO
Bolsas de palomitas	5
Caramelos	7
Chicles de menta	2
Piruletas	10

EJEMPLO

Las estaturas (en cm) de 27 jóvenes son:

155, 178, 170, 165, 173, 168, 160, 166, 176, 169, 158, 170, 179, 161, 164, 156, 170, 171, 167, 151, 163, 158, 164, 174, 176, 164, 154

Forma una tabla, efectúa el recuento y obtén las marcas de clase.

En este caso, la variable es continua. Por tanto, debemos agrupar los datos en intervalos.

Para ello obtenemos la diferencia entre el valor mayor y el menor:

$$179 - 151 = 28$$

Para incluir todos los valores, tomamos 6 intervalos de amplitud 5 ($6 \cdot 5 = 30 > 28$, que es la diferencia entre el mayor y el menor).

Empezamos por el valor 150.

Marcas de clase: $(150 + 155)/2 = 152{,}5$
$(155 + 160)/2 = 157{,}5$
$(160 + 165)/2 = 162{,}5$
$(165 + 170)/2 = 167{,}5$
$(170 + 175)/2 = 172{,}5$
$(175 + 180)/2 = 177{,}5$

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO
[150, 155)	152,5	3
[155, 160)	157,5	3
[160, 165)	162,5	6
[165, 170)	167,5	5
[170, 175)	172,5	6
[175, 180]	177,5	4

1 Las edades (en años) de 20 alumnos son:

13, 15, 14, 16, 13, 15, 14, 16, 15, 14, 13, 13, 13, 15, 14, 16, 14, 14, 15, 13

¿Qué tipo de variable es? Construye la correspondiente tabla.

EDADES	RECUENTO

2 El sexo de 20 alumnos es:

M, V, V, M, M, M, V, V, M, M, V, M, V, V, M, M, M, M, V, M

¿Qué tipo de variable es? Construye la tabla asociada a estos datos.

SEXO	RECUENTO

3 El peso (en kg) de 20 alumnos es:

66,5; 59,2; 60,1; 64,2; 70; 50; 41,6; 47,9; 42,8; 55;
52,2; 50,3; 42,2; 61,9; 52,4; 49,2; 41,6; 38,8; 36,5; 45

¿Qué tipo de variable es? Construye la tabla asociada a estos datos.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO

4 El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3, 4, 3, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 2, 0, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 4, 2

Obtén una tabla del recuento de datos.

OBJETIVO 4

CALCULAR LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Frecuencia absoluta**, f_i, de un conjunto de datos es el número de veces que se repite cada valor de la variable, x_i, en el total de los datos.
- **Frecuencia relativa**, h_i, es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos: $h_i = \dfrac{f_i}{N}$

  La frecuencia relativa es siempre un número comprendido entre 0 y 1.
- La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, N.
- La suma de las frecuencias relativas es 1.
- **Porcentaje (%)** es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias y porcentajes.

Comenzamos a construir la tabla.

– En la primera columna colocamos los valores de la variable.

– En la segunda columna colocamos el número de veces que aparece cada dato. A este número se le llama frecuencia absoluta.

– En la tercera columna colocamos el *cociente* entre la frecuencia absoluta de cada dato y el número total de datos (20). A este número se le denomina *frecuencia relativa.*

x_i	f_i	h_i	%
13	6	0,30	30
14	7	0,35	35
15	4	0,20	20
16	3	0,15	15
Suma	20	1	100

$$h_1 = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30 \qquad h_2 = \frac{f_2}{N} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$$h_3 = \frac{f_3}{N} = \frac{4}{20} = 0{,}20 \qquad h_4 = \frac{f_4}{N} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

– En la cuarta columna colocamos el porcentaje, resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

1 **Las notas de inglés de 20 alumnos fueron:**

6, 5, 3, 1, 2, 5, 6, 5, 9, 8,
7, 4, 9, 10, 7, 7, 8, 6, 5, 5

Construye la tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.

x_i	f_i	h_i	%
1	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	$0{,}05 \cdot 100 = 5$
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Suma	20		

EJEMPLO

Los resultados de un test de inteligencia hecho a 25 personas fueron:

100, 80, 92, 101, 65, 72, 121, 68, 75, 93, 101, 100, 102,
97, 89, 73, 121, 114, 113, 113, 106, 84, 94, 83, 74

Obtén la tabla de frecuencias y de porcentajes tomando intervalos de amplitud 10.

– En la primera columna colocamos los valores de la variable, tomando 6 intervalos de amplitud 10, ya que la diferencia entre los valores extremos es 121 − 65 = 56.
– En la segunda columna colocamos la marca de clase de cada intervalo.
– En la tercera columna colocamos el número de veces que aparece cada dato. A este número se le llama frecuencia absoluta.
– En la cuarta columna colocamos el cociente entre la frecuencia absoluta de cada dato y el número total de datos (20). A este número se le denomina frecuencia relativa.
– En la quinta columna colocamos el porcentaje, que es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[65, 75)	70	5	0,20	20
[75, 85)	80	4	0,16	16
[85, 95)	90	4	0,16	16
[95, 105)	100	6	0,24	24
[105, 115)	110	4	0,16	16
[115, 125]	120	2	0,08	8

2 **El peso (en kg) de 24 personas es:**

68,5; 34,2; 47,5; 39,2; 47,3; 79,2; 46,5; 58,3; 62,5; 58,7; 80; 63,4;
58,6; 50,2; 60,5; 70,8; 30,5; 42,7; 59,4; 39,3; 48,6; 56,8; 72; 60

Agrúpalo en intervalos de amplitud 10 y obtén la tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%

3 **Completa la siguiente tabla.**

x_i	f_i	h_i	%
10		4	
20	5		10
30		61	
40	10		
50		41	
60			18

ADAPTACIÓN CURRICULAR

13 OBJETIVO 5

CALCULAR LAS FRECUENCIAS ACUMULADAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Frecuencia absoluta acumulada, F_i,** de un valor x_i es la suma de las frecuencias f_i de todos los valores menores o iguales que él.
- **Frecuencia relativa acumulada, H_i,** de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos: $H_i = \dfrac{F_i}{N}$

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas.

– Para obtener la frecuencia absoluta acumulada de cada valor hay que sumar las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que él:

$F_1 = f_1 = 6$

$F_2 = f_1 + f_2 = 6 + 7 = 13$

$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 6 + 7 + 4 = 17$

$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 6 + 7 + 4 + 3 = 20$

– Para obtener la frecuencia relativa acumulada de un valor hay que dividir la frecuencia absoluta acumulada de cada valor entre el número total de datos:

$$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30$$

$$H_2 = \frac{F_2}{N} = \frac{f_1 + f_2}{N} = \frac{6+7}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65$$

$$H_3 = \frac{F_3}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{N} = \frac{6+7+4}{20} = \frac{17}{20} = 0{,}20$$

$$H_4 = \frac{F_4}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{N} = \frac{6+7+4+3}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

DATOS x_i	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)	FRECUENCIA RELATIVA (h_i)	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)
13	6	6	3,30	0,30
14	7	13	0,35	0,65
15	4	17	0,20	0,85
16	3	20	0,15	1

1 **Dados los datos de una variable estadística y las frecuencias absolutas, completa la tabla de frecuencias relativas y frecuencias absolutas y relativas acumuladas.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	4			
2	4			
3	3			
4	7			
5	5			
Suma				

2 **Los datos de la tabla se refieren a la estatura (en cm) de 40 alumnos. Obtén la tabla de frecuencias asociada a estos datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[150, 155)		3		
[155, 160)		6		
[160, 165)		9		
[165, 170)		10		
[170, 175)		7		
[175, 180]		5		

3 **Dados los siguientes datos de una variable estadística, calcula su tabla de frecuencias.**

INTERVALO	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8]
FRECUENCIA	10	8	4	2

4 **Completa la siguiente tabla.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
10	5				
11		13			
12	10				
13		35			
14	7				
15	8				16

OBJETIVO 6

UTILIZAR E INTERPRETAR LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Los **gráficos** ayudan a representar fácilmente la información que contienen las tablas estadísticas. Según sea la variable, se usa un tipo u otro de gráfico.

VARIABLES DISCRETAS

- **Diagrama de barras:** se usa para representar datos cualitativos o cuantitativos discretos.
  Sobre el eje *X* se señalan los valores de la variable y se levantan barras de altura igual a la frecuencia representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada).
- **Polígono de frecuencias:** es una línea poligonal que se obtiene a partir del diagrama de barras, uniendo cada extremo de una barra con el extremo de la barra siguiente.

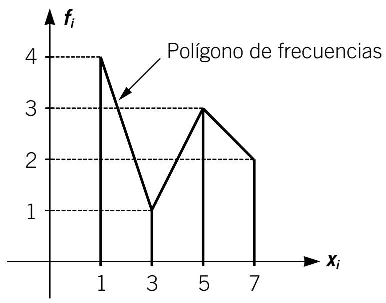
VARIABLES CONTINUAS

- **Histograma:** se usa para representar variables cuantitativas continuas.
  Se señalan sobre el eje horizontal los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de altura igual a la frecuencia representada.
- **Polígono de frecuencias:** se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma.

EJEMPLO

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias del conjunto de datos.

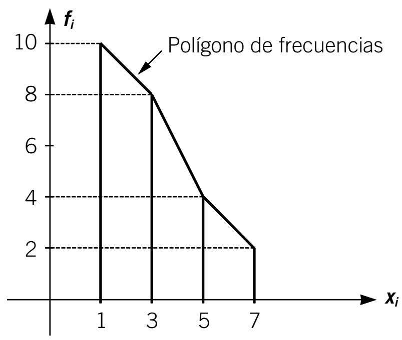
x_i	1	3	5	7
f_i	4	1	3	2



EJEMPLO

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias del siguiente conjunto de datos.

x_i	1	3	5	7
f_i	10	8	4	2



1 **La talla de calzado que utilizan 20 alumnos en una clase de Educación Física es:**

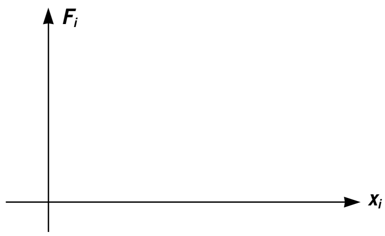
37, 40, 39, 37, 38, 38, 38, 41, 42, 37, 43, 40, 38, 38, 38, 40, 37, 37, 38, 38

Construye la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias absolutas y para las frecuencias absolutas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
37	4			
38	3			
39	7			
40	5			
41	8			
42	7			
43	1			
Suma				

FRECUENCIAS ABSOLUTAS

FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



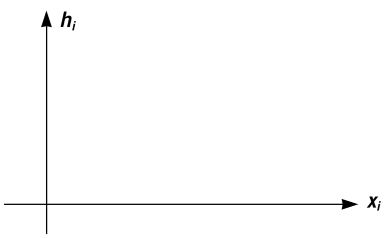
2 **En un edificio hay 25 viviendas y el número de vehículos por vivienda es:**

0, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1

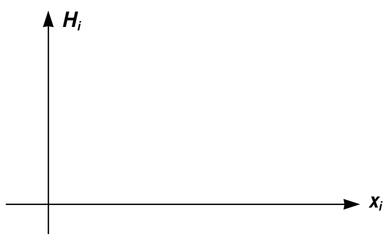
Construye la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0				
1				
2				
3				
4				
Suma				

FRECUENCIAS RELATIVAS



FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS



3 **Al efectuar una encuesta a 50 clientes de un supermercado sobre los kilos de carne comprados a la semana, el 10 % afirmó que compraba de 1 a 2,5 kg; 20 de ellos compraban de 2,5 a 4 kg; el 30 % compraba de 4 a 5,5 kg y el resto de 5,5 a 7 kg.**

a) Completa la tabla de frecuencias.

b) Representa el histograma de frecuencias relativas.

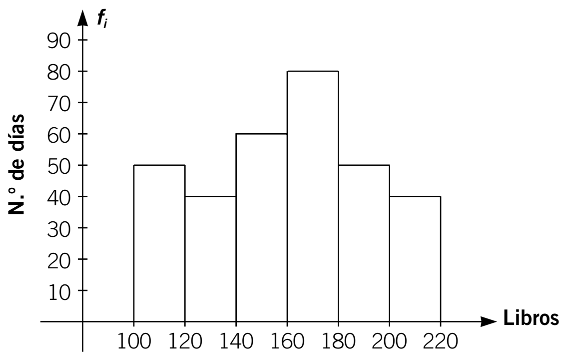
INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

4 **Observa el histograma de frecuencias absolutas referido a los libros vendidos diariamente en una librería.**

a) Completa la tabla de frecuencias.

b) Representa el histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

c) ¿Qué porcentaje de días se vendieron más de 200 libros? ¿Y menos de 100?



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

DISTINGUIR Y CALCULAR LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La media, la mediana y la moda se llaman **medidas de centralización** y son valores que resumen la información de la muestra.
- Dado un conjunto de datos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con frecuencias $f_1, f_2, \ldots, f_n$, la **media**, $\overline{x}$, es igual a:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Si los datos están agrupados en intervalos, el valor x_i es la marca de clase de cada intervalo.

EJEMPLO

Halla la media del siguiente conjunto de datos.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
26	6	156
28	7	196
30	4	120
32	3	96
Suma	20	568

$$\overline{x} = \frac{568}{20} = 28{,}4$$

En la tabla de frecuencias hemos añadido una tercera columna donde se calcula el producto de cada valor por su frecuencia relativa.

1 **Dados los datos: 2, 5, 7, 8 y 7, calcula su media.**

2 **Halla la media del siguiente conjunto de datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
[0, 20)	10	50	
[20, 40)	30	67	
[40, 60)	50	30	
[60, 80]	70	42	
	Suma		

3 **Una alumna ha realizado 8 exámenes de una asignatura obteniendo estas notas: 7, 5, 6, 10, 9, 7, 6 y 6. ¿Qué nota media obtendrá en esa asignatura? Ten en cuenta que para hallar la media hay que sumar los datos y dividir el resultado entre el número total de datos.**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

- La **mediana** de un conjunto de datos es el valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son menores que él y la otra mitad son mayores. Se representa por ***Me***.
  – Si el conjunto de datos es un número impar, la mediana es el valor central.
  – Si el conjunto de datos es par, la mediana es la media de los dos valores centrales.
- La **moda** de un conjunto de datos es el valor o valores de la variable que más se repite. Se representa por ***Mo***.
- **El valor de la moda puede no ser único**, es decir, puede haber varias modas.

EJEMPLO

Obtén la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos: 2, 2, 1, 6, 4, 3 y 9.

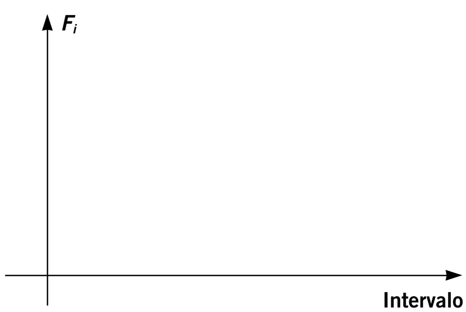
- Mediana:
  Ordenamos de forma creciente los datos: 1, 2, 2, **3**, 4, 6, 9.
  Como el número de datos es impar, la mediana es el valor central: $Me = 3$.
- Moda: el valor que más se repite es 2; por tanto, $Mo = 2$.

4 **Se estudia el número de usuarios de 20 autobuses, obteniendo los siguientes datos.**
3, 12, 7, 16, 22, 13, 18, 4, 6, 19, 24, 25, 4, 8, 12, 22, 17, 19, 23, 4

a) Realiza la tabla, agrupando los valores de 5 en 5 y empezando desde cero.
b) Calcula la moda, la mediana y la media.
c) Realiza un histograma con las frecuencias acumuladas.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$

Media: $\bar{x} =$
Mediana: $Me =$
Moda: $Mo =$



5 **Calcula la media, la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos.**

4, 7, 10, 8, 3, 2, 1, 2, 2, 8

6 **Las tallas de calzado que usan los 20 alumnos de una clase de 3.º ESO son:**

34, 34, 35, 35, 35, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40

Halla la media, la mediana y la moda.

7 **Un deportista quiere comprarse una bicicleta de montaña y analiza el precio y el peso de estas bicicletas.**

BICICLETA	PRECIO (€)	PESO (kg)
Marin Rift Zone	1.474	13,12
Kastle Degree 12.0	2.879	12,2
Sistesi Bazooka	3.540	15,7
Bianchi NTH	4.350	11,52
Arrow Spyce HPR	1.799	13,1
Pro-Flex Beast	1.788	13,46
DBR V-Link Pro	4.494	11,66
Specialized M-2 S-Works	2.934	10,35
Sunn Revolt 2	2.172	11,21
BH Top Line Expert 001	2.550	9,95

a) Halla el precio medio.

b) Calcula el peso medio.

OBJETIVO 8

DISTINGUIR Y CALCULAR LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN

NOMBRE: ______ CURSO: ______ FECHA: ______

- Las **medidas de dispersión** son medidas estadísticas que indican el mayor o menor grado de agrupamiento de los valores que forman un conjunto de datos.
- El recorrido, la desviación, la desviación media, la varianza y la desviación típica son medidas de dispersión.
- El **rango o recorrido** se calcula como la diferencia entre el mayor valor y el menor de la variable estadística.
- La **desviación respecto a la media** es la diferencia entre cada valor de la variable y la media. La suma de las desviaciones siempre es cero.

EJEMPLO

Las estaturas (en cm) de los jugadores de dos equipos de baloncesto son:

EQUIPO A	180	165	170	173	162
EQUIPO B	168	173	171	169	169

Calcula el rango o recorrido y la desviación para cada uno de los equipos.

- Recorrido = mayor valor de la variable − menor valor de la variable
  Equipo A: Recorrido = 180 − 162 = 18 cm
  Equipo B: Recorrido = 173 − 168 = 5 cm
  Podemos observar que las medidas del equipo A están más dispersas que las del equipo B, ya que la diferencia entre el valor mayor y el menor de la variable es mayor en el caso del equipo A.
- Desviación respecto a la media = valor de la variable − media
  Equipo A: Media = (180 + 165 + 170 + 173 + 162)/5 = 170 cm
  180 − 170 = 10 cm 165 − 170 = −5 cm
  170 − 170 = 0 cm 173 − 170 = 3 cm 162 − 170 = −8 cm
  Equipo B: Media = (168 + 173 +171 + 169 + 169)/5 = 170 cm
  168 − 170 = −2 cm 173 − 170 = 3 cm
  171 − 170 = 1 cm 169 − 170 = −1 cm 169 − 170 = −1 cm
  Observamos que la suma de las desviaciones es siempre cero:
  Equipo A: 10 + (−5) + 0 + 3 + (−8) = 0
  Equipo B: (−2) + 3 + 1 + (−1) + (−1) = 0

1 **En un examen de Matemáticas se han obtenido las siguientes notas.**

3, 5, 7, 2, 9, 5, 3

Obtén el recorrido y la desviación.

2 **Las edades de los alumnos de una clase vienen dadas por la siguiente tabla. Obtén el rango y la desviación.**

EDAD (x_i)	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \overline{x}$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})$
13	6			
14	7			
15	4			
16	3			
Suma				

3 **Calcula el recorrido y la desviación de los datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \overline{x}$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})$
[0, 4)		3			
[4, 8)		10			
[8, 12)		5			
[12, 16]		2			
Suma					

4 **Comprueba, para los pesos de 20 alumnos, que la suma de las desviaciones es cero.**

PESO	x_i	f_i	$x_i - \overline{x}$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})$
[35, 41)		2		
[41, 47)		5		
[47, 53)		6		
[53, 59)		1		
[59, 65)		4		
[65, 71]		2		

- **Desviación media (*DM*):** es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
- **Varianza:** es la media de los valores absolutos de las desviaciones al cuadrado.
- **Desviación típica:** es la raíz cuadrada de la varianza. Se designa con la letra σ.

EJEMPLO

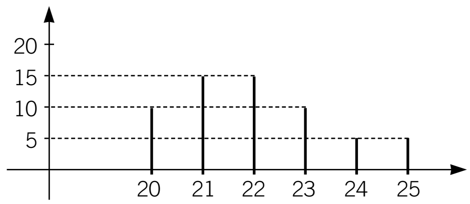
La tabla muestra los resultados obtenidos en un test de 120 preguntas. Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica.

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
[0, 30)	15	12	180	$\lvert 15 - 52{,}35 \rvert = 36{,}73$	1.349,02	$12 \cdot 1.349{,}02 = 16.726.228{,}28$
[30, 60)	45	20	900	$\lvert 45 - 52{,}35 \rvert = 7{,}35$	54,02	$20 \cdot 54{,}02 = 1.080{,}4$
[60, 90)	75	10	750	$\lvert 75 - 52{,}35 \rvert = 22{,}65$	513,02	$10 \cdot 513{,}02 = 5.130{,}2$
[90, 120]	105	7	735	$\lvert 105 - 52{,}35 \rvert = 52{,}65$	2.772,02	$7 \cdot 2.772{,}02 = 19.404{,}14$
	Suma	**49**	**2.565**	**119,38**		**42.343,02**

$$\text{Desviación media} = \frac{36{,}73 \cdot 12 + 7{,}35 \cdot 20 + 22{,}65 \cdot 10 + 52{,}65 \cdot 7}{49} = 24{,}14$$

$$\text{Varianza} = \frac{42.343{,}20}{49} = 864{,}14 \qquad \text{Desviación típica} = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{864{,}14} = 29{,}4$$

5 **Calcula las medidas de centralización y las medidas de dispersión.**



x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert^2$
20							
21							
22							
23							
24							
25							
Suma							

Media = $\overline{x}$ =

Mediana = *Me* =

Moda = *Mo* =

Rango =

Desviación media =

Varianza =

Desviación típica = σ =

6 **La basura (en kg) producida por cada habitante al año en 10 países europeos es la que muestra la siguiente tabla.**

PAÍS	BASURA (kg)
Alemania	337
Bélgica	313
España	214
Francia	288
Gran Bretaña	282
Italia	246
Noruega	415
Países Bajos	381
Suecia	300
Suiza	336

a) Calcula la media de basura producida por cada habitante en estos países.

b) ¿Cuánto vale la mediana de los datos?

c) ¿Cuál es el recorrido de la distribución?

d) Completa la tabla.

PAÍS	BASURA (kg)	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
Alemania	337		
Bélgica	313		
España	214		
Francia	288		
Gran Bretaña	282		
Italia	246		
Noruega	415		
Países Bajos	381		
Suecia	300		
Suiza	336		
Total			

e) ¿Cuánto suman las desviaciones respecto de la media?

f) ¿Cuánto vale la varianza?

g) ¿Y cuánto vale la desviación típica?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 **En el Mundial de Fútbol del año 2006 los jugadores españoles seleccionados tenían las siguientes edades.**

Reina, 23 años	**Capdevila, 28 años**	**Albelda, 28 años**
Íker Casillas, 25 años	**Michel Salgado, 30 años**	**Senna, 29 años**
Cañizares, 36 años	**Sergio Ramos, 20 años**	**Joaquín, 24 años**
Antonio López, 24 años	**Marchena, 26 años**	**Reyes, 22 años**
Pablo Ibáñez, 24 años	**Cesc, 19 años**	**Fernando Torres, 22 años**
Pernía, 29 años	**Iniesta, 22 años**	**Luis García, 27 años**
Puyol, 28 años	**Xavi, 26 años**	**Raúl, 28 años**
Juanito, 29 años	**Xabi Alonso, 24 años**	**Villa, 24 años**

Completa la tabla y calcula.

EDADES (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	$f_i \cdot x_i$	FRECUENCIA ACUMULADA (F_i)	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
Total						

a) La media de edades en 2006.

b) La mediana en 2006.

c) La moda en 2006.

d) El recorrido en 2006.

e) La desviación típica en 2006.

f) La media de edades actuales.

g) La mediana actual.

h) La moda actual.

i) El recorrido actual.

14 Probabilidad

INTRODUCCIÓN

El estudio matemático de la probabilidad surge históricamente vinculado a los juegos de azar. Actualmente la probabilidad se utiliza en muchas disciplinas unidas a la Estadística: predicción de riesgos en seguros, estudios sobre la calidad de procesos industriales, etc.

Las posibles dificultades de la unidad son más de tipo conceptual que de procedimientos, ya que los cálculos numéricos son muy sencillos.

Se debe incidir en la correcta comprensión y aplicación de los conceptos de la unidad: experimento aleatorio o determinista, espacio muestral, suceso, operaciones con sucesos, tipos de frecuencias, probabilidad y regla de Laplace.

La resolución de los ejercicios de la unidad permitirá a los alumnos asimilar los diferentes conceptos. Se hace hincapié en el cálculo de la probabilidad de un suceso, y la aplicación de la regla de Laplace en contextos de equiprobabilidad.

Conviene explicar la relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad como otra forma de alcanzar probabilidades.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Experimento aleatorio*: repetido en igualdad de condiciones no se conoce el resultado.
- *Suceso elemental*: cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- *Suceso seguro*: se verifica siempre. *Suceso imposible*: nunca se verifica.
- *Sucesos compatibles*: se verifican simultáneamente. *Sucesos incompatibles*: no pueden ocurrir a la vez.
- La *unión de dos sucesos* está formada por todos los sucesos elementales de los sucesos.
- La *intersección de dos sucesos* está formada por los sucesos elementales comunes.
- *Frecuencia absoluta* (f_i): número de veces que ocurre el suceso al repetir el experimento aleatorio n veces. *Frecuencia relativa* (h_i): $h_i = \frac{f_i}{N}$.
- *Probabilidad de un suceso*: es un número entre 0 y 1 que mide la facilidad de ocurrencia de un suceso.
- Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir entre experimento aleatorio y determinista.	• Experimento determinista. • Experimento aleatorio.	• Clasificación de experimentos.
2. Obtener el espacio muestral de un experimento aleatorio.	• Espacio muestral. • Suceso elemental.	• Obtención del espacio muestral de un experimento aleatorio.
3. Obtener los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.	• Suceso elemental. • Suceso seguro. • Suceso imposible.	• Obtención de sucesos elementales, suceso seguro e imposible de un experimento aleatorio.
4. Determinar el suceso unión y el suceso intersección de dos sucesos aleatorios. Sucesos compatibles e incompatibles y contrarios.	• Unión e intersección de sucesos. • Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.	• Cálculo de la unión e intersección de dos sucesos dados. • Cálculo de sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.
5. Obtener la frecuencia absoluta y relativa de un suceso.	• Frecuencia absoluta. • Frecuencia relativa.	• Obtención de las frecuencias absolutas y relativas.
6. Calcular la probabilidad de un suceso.	• Probabilidad de un suceso. • Regla de Laplace.	• Utilización de la regla de Laplace para calcular probabilidades.
7. Aplicar las propiedades de la probabilidad.	• Suma de probabilidades. • Probabilidad del suceso seguro, imposible y contrario.	• Aplicación de las propiedades de la probabilidad para resolver problemas en contextos reales.

OBJETIVO 1

DISTINGUIR ENTRE EXPERIMENTO ALEATORIO Y DETERMINISTA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Experimento determinista** es aquel que, una vez estudiado, podemos predecir, es decir, que sabemos lo que sucederá antes de que ocurra.

  Por ejemplo:

  – Si ponemos un recipiente con agua a calentar, sabemos que el agua hierve a 100 °C.

  – Si un coche que va a 100 km/h tarda en hacer un trayecto 2 horas, tenemos la certeza de que ha recorrido 200 km.

  Estos experimentos son deterministas.

- **Experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado que se va a obtener.

  El lenguaje utilizado para expresar experimentos aleatorios está relacionado con situaciones de incertidumbre, ya que se trata de situaciones de azar: «es más probable, es igual de probable, es imposible, es poco probable, es más seguro, es improbable, es casi seguro…».

  Por ejemplo:

  – Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.

  – Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.

1 **Clasifica los siguientes experimentos. En el caso de que el experimento sea aleatorio, escribe un posible resultado.**

EXPERIMENTO	DETERMINISTA	ALEATORIO	
Lanzar un dado		×	Sacar un 3
El resultado de dividir 10 entre 2	×		
En una caída libre de 5 metros, saber la velocidad que se alcanza			
Lanzar una moneda al aire			
Sacar una carta de una baraja española			
Saber la fecha de nacimiento de una persona			
Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 fichas azules			
Lanzar un dado y obtener una puntuación mayor que 5			
Saber el resultado de elevar un número al cuadrado			
Conocer el tiempo que va a hacer mañana			

OBTENER EL ESPACIO MUESTRAL DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por *E*.
- Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL	SUCESOS ELEMENTALES
Lanzar una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (*c*) y cruz (*x*)
Lanzar un dado	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6

1 **Considera un dado en forma de tetraedro.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b) ¿Cuáles son los sucesos elementales del experimento aleatorio que consiste en tirar el dado?

2 **¿Cuál es el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar dos bolas, sin introducir la que se saca, de una urna que contiene dos bolas numeradas como 1 y 2?**

3 **¿Cuál es el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar tres bolas, sin introducir la que se saca, de una urna que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3?**

4 **Se lanzan dos dados y se suman los puntos. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? Forma el espacio muestral.**

OBJETIVO 3

OBTENER LOS SUCESOS ELEMENTALES, SEGURO E IMPOSIBLE

NOMBRE: ______________ CURSO: ______ FECHA: ______

- Un **suceso** está formado por uno o varios sucesos elementales.
- El **suceso seguro** está formado por todos los resultados posibles (sucesos elementales). Se verifica siempre.
- El **suceso imposible** no contiene ningún suceso elemental. Nunca se verifica.

EJEMPLO

En el experimento de lanzar un dado al aire, un **suceso seguro** es obtener un número menor que 6 y un **suceso imposible** es obtener el número 30.

1 **Con una baraja de cartas española, se realiza el experimento de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen estos sucesos.**

a) Sacar oros.
b) Sacar un 5.
c) Sacar figura.
d) Sacar bastos.

2 **Dadas ocho cartas numeradas del 1 al 8, se realiza el experimento aleatorio de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen los siguientes sucesos.**

a) Obtener número par.
b) Obtener múltiplo de 3.
c) Obtener número mayor que 4.

3 **De estos experimentos, indica qué sucesos son seguros e imposibles.**

EXPERIMENTO	SUCESO SEGURO	SUCESO IMPOSIBLE
De una baraja española de 40 cartas, sacar picas		
En una bolsa con 2 bolas rojas y 3 verdes, obtener una bola azul		
En una caja con fichas numeradas del 1 al 4, obtener una ficha con un número menor que 5		
Al lanzar un dado al aire, salir un número mayor que 6		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, obtener 0		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, salir 3		
Al tirar dos dados al aire y multiplicar la puntuación de sus caras, obtener 40		

NOMBRE: __________ CURSO: ________ FECHA: ________

- Una **operación entre sucesos** nos permite obtener otro suceso del mismo espacio muestral.
  Las dos operaciones de sucesos más importantes son la unión y la intersección.
- **Unión de sucesos:** la unión de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) del suceso A y del suceso B:

  $$\boldsymbol{A \cup B = A} \textbf{ unión } \boldsymbol{B}$$

- **Intersección de sucesos:** la intersección de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) comunes de los sucesos A y B:

  $$\boldsymbol{A \cap B = A} \textbf{ intersección } \boldsymbol{B}$$

- Si dos **sucesos** no tienen ningún suceso elemental en común, se dice que son **incompatibles**:

  $$\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$$

- Si dos **sucesos** tienen algún suceso elemental en común, se dice que son **compatibles**:

  $$\boldsymbol{A \cap B \neq \emptyset}$$

- Dado un suceso A, el **suceso contrario o complementario**, $\boldsymbol{\overline{A}}$, está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A.

EJEMPLO

En el experimento consistente en lanzar un dado, consideramos los sucesos:

$A =$ Obtener número menor que $4 = \{1, 2, 3\}$

$B =$ Obtener número impar $= \{1, 3, 5\}$

- Escribimos el suceso unión, formado por todos los sucesos elementales de A y B:

  $$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

- Escribimos el suceso intersección, formado por todos los sucesos elementales comunes de A y B:

  $$A \cap B = \{1, 3\}$$

- Escribimos el suceso contrario de A, formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral del experimento que no están en A:

  $$\overline{A} = \{4, 5, 6\}$$

- Escribimos el suceso contrario de B, formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral del experimento que no están en B:

  $$\overline{B} = \{2, 4, 6\}$$

Vemos que la unión de un suceso y su contrario es siempre el espacio muestral.

1 **Considera el experimento de lanzar un dado con ocho caras numeradas del 1 al 8 y los sucesos $\boldsymbol{A} =$ Salir puntuación par y $\boldsymbol{B} =$ Salir puntuación impar. Escribe el espacio muestral y obtén los siguientes sucesos.**

Espacio muestral: $E =$

a) $A \cup B =$

b) $A \cap B =$

c) $\overline{A} =$

d) $\overline{B} =$

e) $\overline{A} \cap B =$

f) $\overline{A} \cup B =$

2 **De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta y se consideran los siguientes sucesos.**

A **= Salir oros** ***B*** **= Salir un rey** ***C*** **= Salir un as** ***D*** **= No salir oros**

Señala si los sucesos son compatibles, incompatibles o contrarios.

SUCESO	**COMPATIBILIDAD**		**CONTRARIOS**
	COMPATIBLES	**INCOMPATIBLES**	
A y *B*			
A y *C*			
A y *D*			
B y *C*			

3 **De una baraja española de 40 cartas hemos separado los ases y los reyes.**
Con este grupo de cartas realizamos el experimento de sacar dos cartas.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Indica un suceso imposible de este experimento.

c) ¿Cómo son los sucesos de sacar oros y sacar rey?

d) ¿Qué sucesos componen la unión de los sucesos de sacar oros y sacar rey?

e) ¿Qué sucesos elementales forman el suceso de sacar dos reyes?

f) ¿Y el suceso de sacar oros?

4 **En una caja hay ocho bolas, numeradas del 1 al 8. Escribe un suceso compatible, otro incompatible y otro contrario de estos sucesos.**

SUCESO	**COMPATIBLE**	**INCOMPATIBLE**	**CONTRARIO**
A = Sacar un número menor que 4			
B = Sacar un número impar			
C = Sacar múltiplo de 2			
D = Sacar múltiplo de 7			

OBTENER LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN SUCESO

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- **Frecuencia absoluta (f_i)** de un suceso es el número de veces que ocurre dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio *n* veces.
- **Frecuencia relativa (h_i)** de un suceso es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se repite el experimento: $h_i = \frac{f_i}{N}$.

EJEMPLO

Roberto ha lanzado un dado 50 veces, obteniendo los resultados de la tabla.

CARA	1	2	3	4	5	6	Suma
f_i	7	6	14	9	10	4	**50**
h_i	0,14	0,12	0,28	0,18	0,20	0,08	**1**

El número de veces que aparece cada cara es su frecuencia absoluta (f_i).

La frecuencia relativa la obtenemos dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento.

1 **En un bombo hay diez bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla a continuación. Los resultados obtenidos se expresan en la tabla.**

BOLA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11	**100**
h_i											

a) Completa la tabla calculando las frecuencias relativas.

b) Considera los sucesos y calcula.

$A =$ múltiplo de 3, $B =$ número impar y $C =$ divisor de 6

- Frecuencia relativa de A, B y C:

$A = \{3, 6, 9\}$ $\quad h_A = h_3 + h_6 + h_9 =$

$B =$

$C =$

- Frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $\quad h_A = h_1 + h_3 + h_5 + h_6 + h_7 + h_9 =$

$A \cap B =$

$A \cup C =$

$A \cap C =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 6

CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **probabilidad de un suceso** es el número hacia el cual se aproxima la frecuencia relativa de ese suceso conforme aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio.

EJEMPLO

Se lanza un dado de cuatro caras y se anotan las veces que aparece el número 1.

LANZAMIENTOS	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,275	**0,25**	0,225	0,27

Al obtener la tabla de frecuencias relativas correspondiente a este experimento, se observa que el número hacia el cual se aproxima la frecuencia del suceso de aparecer el número 1 es 0,25.

Por tanto, la probabilidad de obtener número 1 al lanzar un dado de cuatro caras es $P = 0{,}25$.

1 **Tira una moneda 25 veces y completa la tabla.**

	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
CARA			
CRUZ			

¿Son las frecuencias relativas números próximos a 0,5? ¿Qué consecuencias obtienes de tus resultados?

REGLA DE LAPLACE

Cuando todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad de un suceso *A* es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

Esta expresión es la regla de Laplace: $\boldsymbol{P(A) = \dfrac{\textbf{Casos favorables}}{\textbf{Casos posibles}}}$

EJEMPLO

Se lanza un dado de seis caras al aire. El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Calcula las siguientes probabilidades.

SUCESO	CASOS FAVORABLES	CASOS POSIBLES	$P = \dfrac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}$
Salir número par	{2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
Salir número menor que 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
Salir número par o menor que 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
Salir número par y 4	{4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{1}{6}$

2 **Se hacen quinielas con un dado que tiene tres caras con el 1, dos caras con la X y la otra cara con el 2. Si se lanza una vez el dado, calcula aplicando la regla de Laplace.**

a) El espacio muestral: $E =$ ……
b) La probabilidad de obtener 1.
c) La probabilidad de obtener X.
d) La probabilidad de obtener 2.

3 **Una urna contiene cuatro bolas: 1 roja, 1 azul, 1 verde y 1 blanca. Si se sacan dos bolas a la vez, calcula.**

a) El espacio muestral: $E =$ ……
b) La probabilidad de que una bola sea blanca y la otra roja.
c) La probabilidad de que las dos bolas sean rojas.
d) La probabilidad de que ninguna de las dos bolas sea blanca.

4 **Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Halla estas probabilidades.**

a) Un rey.
b) Oros.
c) Un 4 o un 6.
d) El rey de oros.
e) Una carta que no sea de copas.
f) Una figura de bastos.
g) Una carta que no sea figura.
h) Una carta menor que 5.

5 **En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres, y el resto ha tomado pescado. Fijándote en la tabla, y completando los datos que faltan, si elegimos una persona al azar, calcula.**

	CARNE	PESCADO	Suma
HOMBRES	16		**28**
MUJERES	20		**32**
Suma	**36**		

a) ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado?

6 **Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Obtén.**

a) El espacio muestral: $E =$ ……
b) La probabilidad de que la suma sea 3.
c) La probabilidad de que la suma sea 7.
d) La probabilidad de que la suma sea superior a 10.
e) La probabilidad de que la suma sea 4 o 5.

OBJETIVO 7

APLICAR LAS PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es 1.**

  Por ejemplo: en el lanzamiento de un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

  $$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

  $$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

- La probabilidad de un suceso es un **número comprendido entre 0 y 1**.
- **La probabilidad del suceso seguro es 1 y la probabilidad del suceso imposible es 0.**
- Siendo A y B dos sucesos del espacio muestral E:

  – Si son incompatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

  Por ejemplo, dados los sucesos incompatibles A = Salir cara número primo y B = Salir cara múltiplo de 4, la probabilidad de que ocurra uno de los dos es:

  $$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

  – Si son compatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

  $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{3, 6\}$

  La probabilidad de que ocurra su unión es: $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

- La **probabilidad del suceso contrario** de A, $\overline{A}$, es: $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

  $A = \{3, 6\}$ y $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$

  $$P(A) = \frac{2}{6} \qquad P(\overline{A}) = \frac{4}{6}$$

  Se comprueba que: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \rightarrow \frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{6}$

1 **De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcula estas probabilidades.**

SUCESO	PROBABILIDAD	SUCESO	PROBABILIDAD
A = Sacar espadas	$P(A) =$	D = Sacar espadas o sota	$P(D) =$
B = Sacar sota	$P(B) =$	E = No sacar espadas	$P(E) =$
C = Sacar espadas y sota	$P(C) =$	F = No sacar sota	$P(F) =$

2 **Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. Se considera el experimento de sacar una bola al azar. Calcula estas probabilidades.**

SUCESO	PROBABILIDAD	SUCESO	PROBABILIDAD
A = Salir bola blanca	$P(A) =$	D = Salir bola que no sea roja	$P(D) =$
B = Salir bola roja	$P(B) =$	E = Salir bola verde	$P(E) =$
C = Salir bola que no sea negra	$P(C) =$	F = Salir bola blanca o negra	$P(F) =$

3 **La probabilidad de un suceso es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?**